محتويات الكتاب

مشروع بحثى فى نهاية كل وحدة

أولًا : الجبر والإحصاء



الوحدة 1 العلاقات والدوال

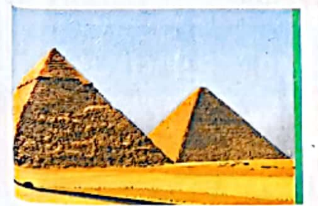


الوحدة 2 النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى



الوحدة 3 الإحصاء

ثانيًا : حساب المثلثات والهندسة



الوحدة 4 حساب المثلثات



الوحدة 5 الهندسة التحليلية

أولًا الجبر والإحصاء









دروس الوحدة :

- الدرس 1 حاصل الضرب الديكارتى.
- الدرس 2 العلاقة - الدالة (التطبيق).
- الدرس 3 التعبير الرمزى عن الدالة - دوال كثيرات الحدود.
- الدرس 4 دراسة بعض دوال كثيرات الحدود.

مشروع بحثى على الوحدة الأولى

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان



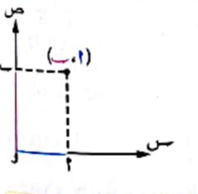
حاصل الضرب الديكارتي

في هذا الدرس سوف نتعرف على مفهوم حاصل الضرب الديكارتي وكيفية إيجاده وتمثيله وقبل تناول هذا الموضوع سوف نتذكر معًا ما درسناه عن الزوج المرتب.

الزوج المرتب

يُسمى (أ ، ب) زوجًا مرتبًا ، ويُسمى أ بالمسقط الأول ، ب بالمسقط الثاني.

ويمكن تمثيل الزوج المرتب (أ ، ب) بنقطة كما بالشكل المقابل.



ملاحظات

- إذا كان : أ ≠ ب فإن : (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) فمثلًا : (٢ ، ٣) ≠ (٣ ، ٢)
  وعند تمثيلهما بيانيًا كما بالشكل المقابل نجد أنهما يقعان في موضعين مختلفين.
- الزوج المرتب ليس مجموعة. أي أن : (أ ، ب) ≠ {أ ، ب}
- (أ ، أ) زوج مرتب ، بينما في المجموعات لا نكتب {أ ، أ} بل نكتب {أ} بدون تكرار العنصر أ
- توجد مجموعة خالية من العناصر يُرمز لها بالرمز ∅ بينما لا يوجد زوج مرتب خالٍ.

تساوي زوجين مرتبين

إذا كان : (أ ، ب) = (س ، ص) فإن : أ = س ، ب = ص

فمثلًا :
- إذا كان : (أ ، ب) = (٣ ، −٤) فإن : أ = ٣ ، ب = −٤
- إذا كان : (س ، ٢) = (−٥ ، ص) فإن : س = −٥ ، ص = ٢

مثال ١

أوجد قيم س ، ص في كل مما يأتي إذا كان :

١ ($س^{٢}$ − ١ ، ٨) = (٤٨ ، $\sqrt[3]{ص}$)   ٢ (٣٢ ، س + ص) = ($ص^{٥}$ ، ٢)

الحل

١ ∵ ($س^{٢}$ − ١ ، ٨) = (٤٨ ، $\sqrt[3]{ص}$) ∴ $س^{٢}$ − ١ = ٤٨

∴ $س^{٢}$ = ٤٩ ∴ س = ± $\sqrt{٤٩}$ ∴ **س = ± ٧**

، $\sqrt[3]{ص}$ = ٨ ∴ ص = $٨^{٣}$ ∴ **ص = ٥١٢**

٢ ∵ (٣٢ ، س + ص) = ($ص^{٥}$ ، ٢)

∴ $ص^{٥}$ = ٣٢ ∴ **ص = ٢** «لأن : $٢^{٥}$ = ٣٢»

، س + ص = ٢ وبالتعويض عن قيمة ص :

∴ س + ٢ = ٢ ∴ **س = ٠**

حاول بنفسك ١

أوجد قيم س ، ص في كل مما يأتي إذا كان :

١ (س + ١ ، $ص^{٢}$) = (٣ ، ٩)

٢ ($س^{٢}$ − ٥ ، ٨) = (٣ ، ٣ ص − ٧)

٣ ($س^{٢}$ − ٢ ، ٢ ص) = (ص ، $\sqrt[3]{٦٤}$)

الإجابات النهائية
لأسئلة حاول بنفسك في نهاية كل درس للتأكد من إجابتك.

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

لأى مجموعتين س ، ص منتهيتين وغير خاليتين يكون :

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة س فى المجموعة ص ، ويُرمز له بالرمز **س × ص**

هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول عنصر ينتمى إلى س

ومسقطها الثانى عنصر ينتمى إلى ص

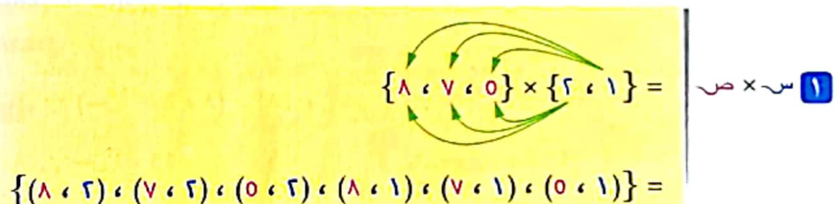
أى أن : س × ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص}

فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٥ ، ٧ ، ٨} فإن :

١ س × ص = {١ ، ٢} × {٥ ، ٧ ، ٨}

= {(١ ، ٥) ، (١ ، ٧) ، (١ ، ٨) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٢ ، ٨)}

والجدول التالى يساعدنا فى إيجاد : س × ص



المسقط الأول \ المسقط الثانى	٥	٧	٨
١	(١ ، ٥)	(١ ، ٧)	(١ ، ٨)
٢	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٧)	(٢ ، ٨)

٢ ص × س = {٥ ، ٧ ، ٨} × {١ ، ٢}

= {(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٧ ، ١) ، (٧ ، ٢) ، (٨ ، ١) ، (٨ ، ٢)}

والجدول المقابل يساعدنا فى إيجاد : ص × س

المسقط الأول \ المسقط الثانى	١	٢
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)
٧	(٧ ، ١)	(٧ ، ٢)
٨	(٨ ، ١)	(٨ ، ٢)

مما سبق لاحظ أن :

س × ص ≠ ص × س حيث : س ≠ ص

ملاحظة

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة س فى نفسها ، ويرمز له بالرمز **س × س**

أو بالرمز **س^٢** ويُقرأ «س اثنين»

هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى كل من مسقطها الأول والثانى عنصر من عناصر س

أى أن : س × س = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س}

فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢}

فإن : س × س = {١ ، ٢} × {١ ، ٢}

= {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

المسقط الأول \ المسقط الثانى	١	٢
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)

ملاحظتان

- لأى مجموعة س يكون :

  س × ∅ = ∅ × س = ∅ حيث : ∅ المجموعة الخالية.

- إذا كان : (أ ، ب) ∈ س × ص فإن : أ ∈ س ، ب ∈ ص

  فمثلًا : إذا كان : (٣ ، ٥) ∈ س × ص فإن : ٣ ∈ س ، ٥ ∈ ص

تمثيل حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين بطريقتين :

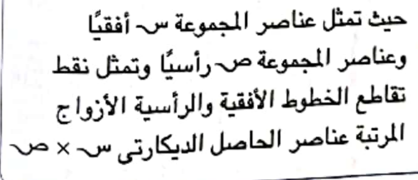
• **الطريقة الأولى :** المخطط السهمى. • **الطريقة الثانية :** المخطط البيانى (الديكارتى).

فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٥ ، ٧ ، ٨}

فإنه يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتى س × ص حيث :

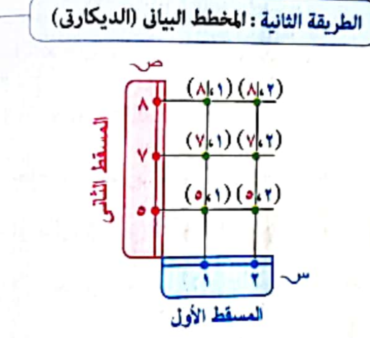
س × ص = {(١ ، ٥) ، (١ ، ٧) ، (١ ، ٨) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٢ ، ٨)} كالتالى :

الطريقة الأولى : المخطط السهمى



حيث نرسم سهمًا من كل عنصر يمثل المسقط الأول «وهى عناصر المجموعة س» إلى كل عنصر يمثل المسقط الثانى «وهى عناصر المجموعة ص»

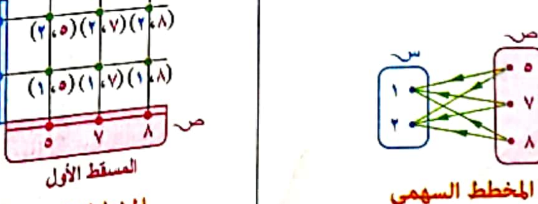
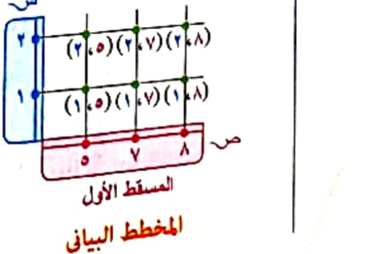
الطريقة الثانية : المخطط البيانى (الديكارتى)



حيث تمثل عناصر المجموعة س أفقيًا وعناصر المجموعة ص رأسيًا وتمثل نقط تقاطع الخطوط الأفقية والرأسية الأزواج المرتبة عناصر الحاصل الديكارتى س × ص

• وبالمثل يمكن تمثيل ص × س حيث :

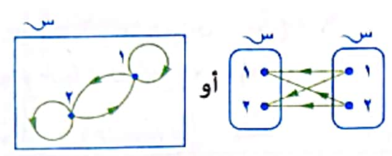
ص × س = {(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٧ ، ١) ، (٧ ، ٢) ، (٨ ، ١) ، (٨ ، ٢)} كالتالى :

المخطط السهمى **المخطط البيانى**

• كما يمكن تمثيل س × س حيث :

س × س = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)} كالتالى :



المخطط السهمى

المسقط الثانى
المسقط الأول
المخطط البيانى

لاحظ أن : الشكل يُسمى «عروة» لتدل على أن السهم يخرج من النقطة وينتهى عند نفس النقطة.

مثال ٢

إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {أ ، ب} فأوجد كلًا من :

١ س × ص ٢ ص × س ٣ س × س

وأوجد عدد عناصر كل منها.

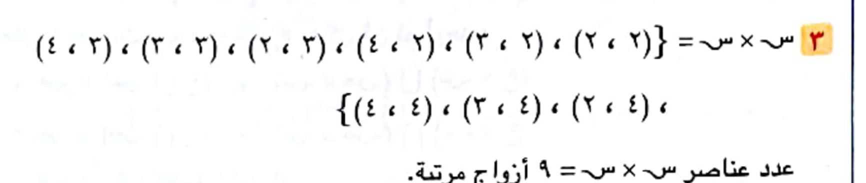
الحل

١ س × ص = {(٢ ، أ) ، (٢ ، ب) ، (٣ ، أ) ، (٣ ، ب) ، (٤ ، أ) ، (٤ ، ب)}

عدد عناصر س × ص = ٦ أزواج مرتبة.

٢ ص × س = {(أ ، ٢) ، (أ ، ٣) ، (أ ، ٤) ، (ب ، ٢) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٤)}

عدد عناصر ص × س = ٦ أزواج مرتبة.



٣ س × س = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤)}

عدد عناصر س × س = ٩ أزواج مرتبة.

ملاحظات

إذا رمزنا لعدد عناصر أى مجموعة بالرمز ن فإنه من المثال السابق نجد أن :

- ن(س) = ٣ ، ن(ص) = ٢
- ن(س × ص) = ٦ ، ن(ص × س) = ٦ ، ن(س × س) = ٩

أى أن : ❶ ن(س × ص) = ن(ص × س) = ن(س) × ن(ص)

❷ ن(س × س) = $(ن(س))^{٢}$

حاول بنفسك ٢

إذا كانت : س = {٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٥ ، ٦} ، ع = {١ ، ٤} فأوجد كلًّا مما يأتى :

١ ص × س ومثله بمخطط سهمى.

٢ $س^{٢}$ ومثله بمخطط بيانى.

٣ ن(س × ع)

٤ $ن(ص^{٢})$

تذكر العمليات على المجموعات

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} فإن :

- س ∩ ص = مجموعة العناصر المشتركة بين س و ص = {٣ ، ٤}
- س ∪ ص = مجموعة العناصر الموجودة فى س أو ص دون تكرار = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
- س − ص = مجموعة العناصر الموجودة فى س وغير موجودة فى ص وهى {١ ، ٢}
- ص − س = مجموعة العناصر الموجودة فى ص وغير موجودة فى س وهى {٥ ، ٦}

مثال ٣

إذا كانت : س = {أ ، ب} ، ص = {٣ ، ٥ ، ٧} ، ع = {٥ ، ٧ ، ٩}

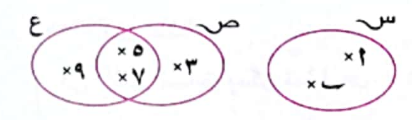
مثل المجموعات س ، ص ، ع بشكل فن ثم أوجد :

١ س × (ص ∪ ع) ، (س × ص) ∪ (س × ع)

٢ س × (ص ∩ ع) ، (س × ص) ∩ (س × ع)

٣ س × (ع − ص) ، (س × ع) − (س × ص)

الحل



١ ∵ ص ∪ ع = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

∴ س × (ص ∪ ع) = {أ ، ب} × {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

= {(أ ، ٣) ، (أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (أ ، ٩) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧) ، (ب ، ٩)}

، س × ص = {أ ، ب} × {٣ ، ٥ ، ٧}

= {(أ ، ٣) ، (أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧)} (١)

، س × ع = {أ ، ب} × {٥ ، ٧ ، ٩}

= {(أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (أ ، ٩) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧) ، (ب ، ٩)} (٢)

ومن (١) ، (٢) :

∴ (س × ص) ∪ (س × ع) = {(أ ، ٣) ، (أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (أ ، ٩) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧) ، (ب ، ٩)}

٢ ∵ ص ∩ ع = {٥ ، ٧}

∴ س × (ص ∩ ع) = {أ ، ب} × {٥ ، ٧}

= {(أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧)}

ومن (١) ، (٢) :

∴ (س × ص) ∩ (س × ع) = {(أ ، ٥) ، (أ ، ٧) ، (ب ، ٥) ، (ب ، ٧)}

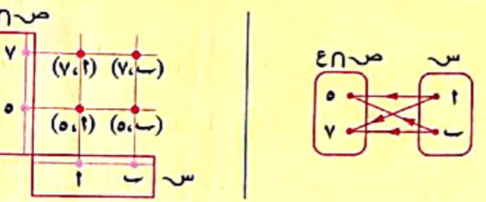
٣ ∵ ع − ص = {٩}

∴ س × (ع − ص) = {أ ، ب} × {٩} = {(أ ، ٩) ، (ب ، ٩)}

ومن (١) ، (٢) : ∴ (س × ع) − (س × ص) = {(أ ، ٩) ، (ب ، ٩)}

ملاحظة

في المثال السابق يمكن تمثيل س × (ص ∩ ع) بمخطط سهمي وآخر بياني كالتالي :



حاول بنفسك ٣

إذا كانت : س = {٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥} ، ع = {٢}

مثل كلًا من : س ، ص ، ع بشكل فن ثم أوجد :

(١) ع × (س ∩ ص)   (٢) (ع × س) ∪ (ع × ص)

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين غير منتهيتين

* نعلم أنه إذا كانت س مجموعة منتهية عدد عناصرها ن فإن حاصل الضرب الديكارتي س × س هو أيضًا مجموعة منتهية عدد عناصرها ن²

فمثلًا : إذا كان : ن(س) = ٣ فإن : ن(س × س) = ٩

* أما إذا كانت س مجموعة غير منتهية فإن : س × س تكون مجموعة غير منتهية أيضًا.

ومن أمثلة ذلك : ط × ط = {(س ، ص) : س ∈ ط ، ص ∈ ط}

، ص × ص = {(س ، ص) : س ∈ ص ، ص ∈ ص}

، ن × ن = {(س ، ص) : س ∈ ن ، ص ∈ ن}

، ح × ح = {(س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح}

تمثيل حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين غير منتهيتين

* نعلم أنه إذا كانت س مجموعة منتهية فإن حاصل الضرب الديكارتي س × س يمثل بمخطط بياني يتكون من عدد منتهٍ من النقط.
* أما إذا كانت س مجموعة غير منتهية فإن حاصل الضرب الديكارتي س × س يمثل بمخطط بياني يتكون من عدد غير منتهٍ من النقط.

وفيما يلي التمثيل البياني لكل من : ط × ط ، ص × ص ، ح × ح :

أولًا تمثيل حاصل الضرب الديكارتي ط × ط (ط²)

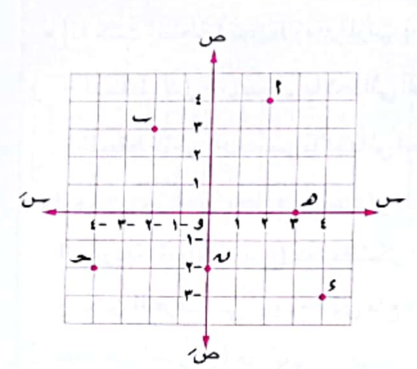
* نمثل الأعداد الطبيعية على مستقيمين متعامدين أحدهما أفقي س س َ والآخر رأسي ص ص َ حيث س س َ ، ص ص َ يتقاطعان في النقطة التي تمثل العدد صفر على كل منهما أي أن : و (٠ ، ٠)
* والشكل المقابل يمثل جزءًا صغيرًا من الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتي ط × ط والتي تتكون من تقاطع المستقيمات الرأسية والأفقية المارة بالنقط التي تمثل الأعداد الطبيعية على كل من س س َ ، ص ص َ
* وكل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ط × ط

فمثلًا : • النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣ ، ٢) • النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٥ ، ٠)

• النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٤) • النقطة و تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٠)

ثانيًا تمثيل حاصل الضرب الديكارتي ص × ص (ص²)

* نمثل الأعداد الصحيحة على كل من س س َ ، ص ص َ المتقاطعين في نقطة و (٠ ، ٠)
* والشكل المقابل يمثل جزءًا صغيرًا من الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتي ص × ص
* وكل نقطة من نقاطها تمثل أحد الأزواج المرتبة في الحاصل الديكارتي ص × ص



فمثلًا : • النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢ ، ٤) • النقطة ب تمثل الزوج المرتب (-٢ ، ٣)

• النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (-٤ ، -٢) • النقطة ء تمثل الزوج المرتب (٤ ، -٣)

• النقطة هـ تمثل الزوج المرتب (٣ ، ٠) • النقطة ن تمثل الزوج المرتب (٠ ، -٢)

ثالثًا تمثيل حاصل الضرب الديكارتى ح × ح (ح²)

* الشبكة التربيعية المتعامدة للحاصل الديكارتى ح × ح هى عبارة عن سطح منطقة ممتدة بلا حدود من جميع الاتجاهات والشكل المقابل يوضح جزءًا صغيرًا من هذه المنطقة.

* كل نقطة من نقاط هذه المنطقة تمثل أحد الأزواج المرتبة للحاصل الديكارتى ح × ح

فمثلًا : • النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٣ ، −٢)

• النقطة ب تمثل الزوج المرتب (−٤ ، ٣)

ملاحظات

• يُسمى المستقيم الأفقى $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ محور السينات أو المحور الأفقى.

و يُسمى المستقيم الرأسى $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ محور الصادات أو المحور الرأسى.

• نقطة تقاطع المحورين $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ تُسمى بـ «نقطة الأصل»

• إذا كانت النقطة أ تمثل الزوج المرتب (س ، ص) فى الحاصل الديكارتى ح × ح فإن :

– المسقط الأول س يسمى بالإحداثى السينى للنقطة أ

– المسقط الثانى ص يسمى بالإحداثى الصادى للنقطة أ

• المحوران $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ يقسمان المستوى إلى أربعة أقسام (أرباع) كما بالشكل المقابل ويمكن التعرف على الربع الذى تقع فيه أى نقطة من إشارتى إحداثييها.

الربع الأول: س > صفر ، ص > صفر

الربع الثانى: س < صفر ، ص > صفر

الربع الثالث: س < صفر ، ص < صفر

الربع الرابع: س > صفر ، ص < صفر

• إذا كان الإحداثى السينى للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات.

• إذا كان الإحداثى الصادى للنقطة = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات.

مثال ٤

اذكر الربع الذى تقع فيه أو المحور الذى تقع عليه كل من النقط الآتية ثم عين موضعها على الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ح × ح : أ (٢ ، −١) ، ب (−٤ ، ١) ، حـ (١ ، ٣) ، ء (−٢ ، −٢) ، هـ ($2\frac{1}{2}$ ، ٠) ، و (٠ ، $-2\frac{1}{2}$)

الحل

• أ (٢ ، −١) تقع فى الربع الرابع.

• ب (−٤ ، ١) تقع فى الربع الثانى.

• حـ (١ ، ٣) تقع فى الربع الأول.

• ء (−٢ ، −٢) تقع فى الربع الثالث.

• هـ ($2\frac{1}{2}$ ، ٠) تقع على محور السينات.

• و (٠ ، $-2\frac{1}{2}$) تقع على محور الصادات.



حاول بنفسك ٤

أكمل الجدول التالى بكتابة الربع أو المحور الذى تقع عليه كل نقطة :

النقطة	(−٣ ، ٥)	(٢ ، −١)	(٥ ، $\frac{1}{2}$)	($-\frac{1}{2}$ ، $-2\frac{1}{4}$)	(٠ ، ٥)	($-1\frac{1}{5}$ ، ٠)
الربع أو المحور	....	....	....	....	....	....

حاصل الضرب الديكارتى لفترتين

سبق أن درسنا أن الفترة هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، ويكون حاصل الضرب الديكارتى لفترتين مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتى ح × ح

ويمكن تمثيله كما بالمثال التالى :

مثال ٥

إذا كانت : س = [٠ ، ٣] ، ص = [١ ، ٣]

فمثل بيانيًا باستخدام الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ح × ح المنطقة التى تمثل كلاً من :

١ س × ص ٢ س × س ٣ ص × ص

ثم بين فى كل حالة أيًا من النقط الآتية ينتمى إلى كل من حواصل الضرب الديكارتية السابقة وأيها لا ينتمى : (٢ ، ٢) ، (١ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

الحل

١ لتمثيل س × ص بيانيًا نتبع ما يلى :

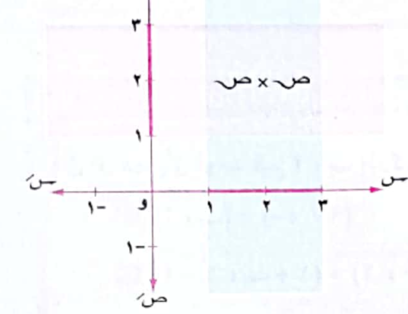
- نمثل الفترة س على محور السينات.
- ، نمثل الفترة ص على محور الصادات.
- تمثل منطقة تقاطع اللونين الحاصل الديكارتى س × ص
- (٢ ، ٢) ∈ س × ص لأنها تنتمى للمنطقة التى تمثل س × ص
- ، (١ ، ٠) ∉ س × ص لأنها تقع خارج المنطقة التى تمثل س × ص
- ، (٠ ، ٣) ∈ س × ص

٢ لتمثيل س × س بيانيًا نتبع ما يلى :

- نمثل الفترة س مرة على محور السينات ومرة أخرى على محور الصادات.
- منطقة تقاطع اللونين تمثل س × س
- (٢ ، ٢) ∈ س × س
- ، (١ ، ٠) ∈ س × س ، (٠ ، ٣) ∈ س × س

٣ بالمثل يمكن تمثيل ص × ص كما بالشكل المقابل :

- (٢ ، ٢) ∈ ص × ص
- ، (١ ، ٠) ∉ ص × ص
- ، (٠ ، ٣) ∉ ص × ص



حاول بنفسك ٥

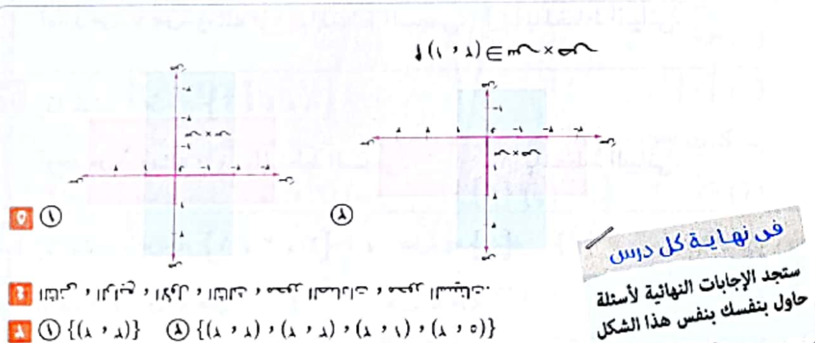
إذا كانت : س = [−٢ ، ١] ، ص = [٠ ، ٢]

أوجد المنطقة التى تعبر عن كل مما يأتى باستخدام الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتى ح × ح :

١ س × س ٢ س × ص

وبين أيًا من النقط الآتية ينتمى إلى س × ص :

أ (١ ، ٢) ، ب (٠ ، −٢) ، ج (٣ ، −١) ، د (−٢ ، −٢)









تمارين 1

على حاصل الضرب الديكارتى

📖 أسئلة كتاب الوزارة

أولاً حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين

1 فى كل مما يأتى أوجد قيم أ ، ب إذا كان :

[1] 📖 (أ ، ب) = (-٥ ، ٩)

[2] (أ ، ب) = ($\sqrt{٢٥}$ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

[3] 📖 (أ − ٢ ، ب + ١) = (٢ ، -٣)

[4] 📖 (٦ ، ب − ٣) = (٢ − أ ، -١)

[5] 📖 (أ − ٧ ، ٢٦) = (-٢ ، ب^{٣} − ١)

[6] (أ ، ب) = (٢ − أ ، ٢ب − ٣)

[7] (أ^{٥} ، ب^{٢} − ١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{٢٧}$)

[8] (أ ، ٧) = (ب^{٢} ، ب)

[9] (٢أ ، ٧) = (٢ب + ١ ، أ)

[10] (٣ ، ب) = (٥أ − ١ ، ٤أ)

2 إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

أوجد س × ص ومثله : [1] بالمخطط السهمى. [2] بالمخطط البيانى.

3 إذا كانت : س = {٣ ، ٤ ، ٨}

أوجد س^{٢} ومثله : [1] بالمخطط السهمى. [2] بالمخطط البيانى.

4 إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٤}

أوجد : [1] س × ص [2] ص × س

[3] ص^{٢} [4] ن(س^{٢})

5 📖 إذا كانت : س = {٢ ، -١} ، ص = {٤ ، ٠} ، ع = {٤ ، ٥ ، -٢}

أوجد : [1] س × ص [2] ص × ع [3] س^{٢}

[4] ن(س × ع) [5] ن(ص^{٢}) [6] ن(ع^{٢})

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : (س − ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣)

فإن : $\sqrt{س + ٢ ص}$ = ... (بورسعيد ١٩)

(أ) ٥ (ب) ± ٥ (جـ) $\sqrt{١٧}$ (د) ٢٥

٢ إذا كان : (س + ٢ ، ص) = (٢ ، ٣)

فإن : $س^{٥}$ ص + ١ = ... (الشرقية ٢٠)

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١

٣ إذا كان : ($٣^{س}$ ، $\sqrt{ص}$) = (١ ، ٤) فإن : س + ص = ... (الغربية ١٨)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١٦ (د) ١٧

٤ لأى مجموعتين أ ، ب تعبر المجموعة {(س ، ص) : س ∈ أ ، ص ∈ ب}

عن .... (الدقهلية ١٦)

(أ) ن(أ × ب) (ب) أ × ب (جـ) ن(ب × أ) (د) ب × أ

٥ إذا كانت : س = {١ ، ٢} فإن : س × ∅ = ...

(أ) س (ب) ∅

(جـ) {٠} (د) {(١ ، ٠) ، (٢ ، ٠)}

٦ إذا كانت : س = {٢} ، ص = {٣} فإن : س × ص = ... (الجيزة ١٧)

(أ) ٦ (ب) {٦} (جـ) (٢ ، ٣) (د) {(٢ ، ٣)}

٧ إذا كانت : س = {٣} فإن : $س^{٢}$ = ... (الشرقية ١٧ ، القاهرة ١٣)

(أ) ٩ (ب) (٣ ، ٣) (جـ) {٩} (د) {(٣ ، ٣)}

٨ إذا كانت : س = {٣} فإن : ن($س^{٢}$) = ... (قنا ٢٠)

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) {٣ ، ٣} (د) ٣

٩ إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤}

فإن : (٣ ، ٤) ∈ .... (السويس ١٩ ، قنا ١١)

(أ) س × ص (ب) ص × س (جـ) $س^{٢}$ (د) $ص^{٢}$

١٠ إذا كان : $د$(س) = ٢ ، ص = {١ ، ٢}

فإن : $د$(س × ص) = ... (الجيزة ١٥)

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

١١ إذا كان : $د$(س) = ٣ ، $د$(س × ص) = ١٢

فإن : $د$(ص) = ... (بورسعيد ٢٠ ، المنيا ١٩ ، القاهرة ١٨ ، بورسعيد ١٧ ، دمياط ١٥)

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٣٦

١٢ إذا كان : $د$(س²) = ٩ فإن : $د$(س) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٨١

١٣ إذا كان : $د$(س²) = ٤ ، $د$(س × ص) = ٦

فإن : $د$(ص²) = ... (الجيزة ٢٠)

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٦ (د) ١٢

١٤ إذا كان : $د$(س) = $د$(س × ص) فإن : $د$(ص) = ... (دمياط ١٨)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٥ إذا كان : أ ∈ س² حيث س = {س : ٥ < س < ٧ ، س ∈ ط}

فإن : أ = ... (الشرقية ٢٠)

(أ) ٣٦ (ب) {٣٦} (جـ) (٦ ، ٦) (د) [٥ ، ٧]

١٦ إذا كان : (٣ ، ٥) ∈ {٣ ، ٦} × {س ، ٨}

فإن : س = ... (الإسكندرية ٢٠ ، بورسعيد ١٩ ، كفر الشيخ ١٨ ، قنا ١٥)

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٣

١٧ إذا كان : {٢} × {س ، ص} = {(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٣)}

فإن : س − ص = ... (كفر الشيخ ٢٠ ، الشرقية ١٥)

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ±١ (د) صفر

٧ إذا كان : س × ص = {(٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٩)} أوجد : س ، ص

٨ إذا كان : س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)}

أوجد : [١] س ، ص [٢] ص × س [٣] ص^{٢}

(القليوبية ٢٠ ، سوهاج ١٩ ، الجيزة ١٦)

٩ إذا كان : س^{٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)} **أوجد :** س

١٠ إذا كان : ص × س = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)} **أوجد :** س^{٢}

١١ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

مثل س ، ص بشكل ڤن ثم أوجد :

[١] (س ∩ ص) × ص [٢] (س − ص) × ص [٣] (ص − س) × س

١٢ إذا كانت : س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٦ ، ٥}

أوجد : [١] س × (ص ∩ ع) [٢] (س − ص) × ع

[٣] (س − ص) × (ص − ع)

(المنيا ١٩ ، المنوفية ١٨ ، الدقهلية ١٣)

١٣ إذا كانت : س = {١} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٢ ، ٥ ، ٦}

مثل المجموعات س ، ص ، ع بشكل ڤن ثم أوجد :

أولًا : [١] س × ص [٢] ص × ع [٣] س × ع [٤] ص^{٢}

ثانيًا : (س × ص) ∪ (ص × ع)

ثالثًا : س × (ص ∩ ع)

رابعًا : (س × ص) ∩ (س × ع)

خامسًا : (ع − ص) × (س ∪ ص)

ثانيًا حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين غير منتهيتين

١٤ على شبكة بيانية متعامدة للحاصل الديكارتى ح × ح عين النقط الآتية :

أ (٤ ، ٥) ، ب (٦ ، −٣) ، حـ (−٢ ، ٧) ، ء (−١ ، ٦) ، هـ (−٤ ، −٥)

، م (٠ ، ٦) ، ك (٩ ، ٠)

ثم اذكر الربع الذى تقع فيه أو المحور الذى تنتمى إليه كل من هذه النقاط.

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ النقطة .... تقع فى الربع الثانى.

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (–٢ ، ٣) (جـ) (–٣ ، –٢) (د) (٢ ، –٣)

٢ إذا كانت النقطة (أ – ب ، ٥) تقع على محور الصادات فإن .... (الجيزة ١٨)

(أ) أ = ب (ب) أ + ب = صفر (جـ) أ ≠ ب (د) أ – ب = ٥

٣ إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات

فإن : ب = ... (القليوبية ٢٠ ، القاهرة ١٨ ، قنا ١٧ ، ش. سيناء ١٦ ، الإسكندرية ١١)

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

٤ إذا كانت النقطة (س ، ٧) تقع على محور الصادات

فإن : ٥ س + ١ = ... (البحيرة ١٧)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٦

٥ إذا كانت : (س + ١ ، $\sqrt[3]{٢٧}$) = (–١ ، ص) فإن النقطة (س ، ص) تقع فى الربع .... (الفيوم ٢٠)

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

٦ إذا كانت : ب > ٣ فإن النقطة (٥ ، ب – ٣) تقع فى الربع .... (القاهرة ١٦)

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

٧ إذا كانت : س ∈ ع_ فإن النقطة (–س ، $\sqrt[3]{س}$) تقع فى الربع .... (المنوفية ٢٠)

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

٨ إذا كانت النقطة (أ ، ب) تقع فى الربع الرابع فإن : أ ب .... صفر

(أ) = (ب) < (جـ) > (د) ≤

٩ إذا كانت النقطة (٢ أ ، ٣ ب) ∈ $\overleftrightarrow{\text{س س}}$ فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ... (حيث أ ≠ ٠)

(أ) صفر (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

١٠ إذا كان : $(|س| ، ٤) = (٣ ، ص^٢)$ والنقطة (س ، ص) تقع فى الربع الثانى

فإن : س + ص = ...

(الشرقية ١٤)

(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) −١ (د) −٧

١١ إذا كانت : أ < صفر ، ب > صفر ، فإن النقطة التى تقع فى الربع الثانى هى ....

(الفيوم ١٨)

(أ) (أ ، ب) (ب) (−أ ، ب) (جـ) (أ ، −ب) (د) (−أ ، −ب)

١٢ إذا كانت النقطة (س − ٢ ، س − ٤) تقع فى الربع الرابع فإن : س = ...

حيث س ∈ ص

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٣ إذا كانت النقطة (س − ٤ ، ٢ − س) حيث س ∈ ص تقع فى الربع الثالث

فإن : س = ...

(البحيرة ٢٠ ، بوسعيد ١٩ ، المنوفية ١٧ ، كفر الشيخ ١٦ ، الإسكندرية ١٥)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

١٤ إذا كانت : النقطة $(ك^٢ − ٤ ، ك)$ تقع على الجزء السالب من محور الصادات

فإن : ك = ...

(الشرقية ١٨)

(أ) ± ٢ (ب) ٤ (جـ) −٢ (د) ٢

١٦ إذا كانت : أ (−٢ ، ٠) ، ب (−٢ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٣) فعيِّن على الشبكة التربيعية $ع^٢$ النقط أ ، ب ، حـ ثم أوجد مساحة Δ أ ب حـ

«٦ وحدات مربعة»

١٧ إذا كانت : س = [−٢ ، ٣]

أوجد المنطقة التى تمثل س × س ثم بيِّن أى من النقاط التالية تنتمى إلى الحاصل الديكارتى س × س :

أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، −١) ، حـ (−١ ، ٤) ، ء (−٢ ، ٠)

١٨ إذا كانت : س = [−٢ ، ٣] ، ص = [٠ ، ٤] فأوجد المنطقة التى تمثل كلًا من :

١ س × ص ٢ ص × س ٣ $ص^٢$

١٩ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ إذا كان : (س – ص) × ص = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣)} ، ن(س × ص) =
(الشرقية

فإن : س = ...

(أ) {١} (ب) {١ ، ٢} (جـ) {١ ، ٣ ، ٦} (د) {١ ، ٣ ، ٢

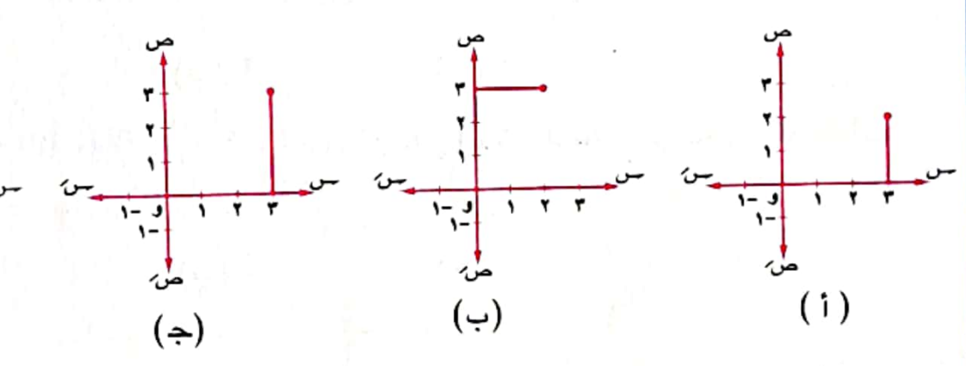
٢ إذا كان : س – ص = {٧} ، ص – س = {٢ ، ٤} ، س ∩ ص = {

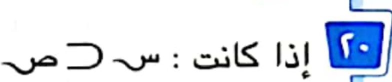
فإن : (س × ص) ∩ (ص × س) = ...

(أ) {(٦ ، ٦)} (ب) {(٧ ، ٢) ، (٧ ، ٤)}

(جـ) {(٢ ، ٧) ، (٤ ، ٧)} (د) {(٧ ، ٦)}

٣ {٣} × [٠ ، ٢] يمثلها بيانيًا الشكل ....





٢٠ إذا كانت : س ⊃ ص

، س × ص = {(أ ، ١) ، (أ ، ٢) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣)}

فأوجد قيم : أ

٢١ إذا كانت : س ⊃ ص ، وكان ن(س × ص) = ٦ ، ٤ ∈ س ، (١ ، ٧) ∈ س × ص

فأوجد : س ، ص ، س × ص

(دمياط ١٧



العلاقة - الدالة (التطبيق)

أولاً العلاقة

العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هى ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص وسنرمز لها عادة بالرمز «ع»

- بيان العلاقة ع من س إلى ص هو مجموعة من الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول ينتمى إلى س ، ومسقطها الثانى ينتمى إلى ص ويرتبط المسقط الأول فى كل منها بالمسقط الثانى بهذه العلاقة.

فإذا كان : (أ ، ب) ∈ بيان ع حيث أ ∈ س ، ب ∈ ص فإننا نعبر عن ذلك فنكتب «أ ع ب»

- بيان العلاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص يكون مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتى س × ص

أى أن : بيان ع ⊂ س × ص

- يمكن تمثيل العلاقة بمخطط سهمى أو مخطط ديكارتى (بيانى).

مثال ١

إذا كانت : س = {٢ ، ٥} ، ص = {١ ، ٤ ، ٧} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث «أ ع ب» تعنى «أ < ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر ديكارتى (بيانى).

الحـــل

∵ ٢ ليست أصغر من ١ ∴ (٢ ، ١) ∉ بيان ع

، ∵ ٢ < ٤ ∴ (٢ ، ٤) ∈ بيان ع

، ∵ ٢ < ٧ ∴ (٢ ، ٧) ∈ بيان ع

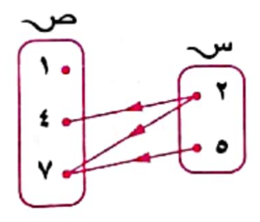
، ∵ ٥ ليست أصغر من ١ ∴ (٥ ، ١) ∉ بيان ع

، ∵ ٥ ليست أصغر من ٤ ∴ (٥ ، ٤) ∉ بيان ع

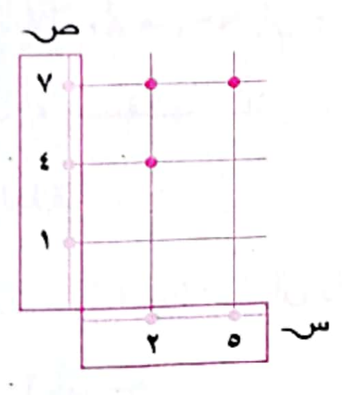
، ∵ ٥ < ٧ ∴ (٥ ، ٧) ∈ بيان ع

∴ بيان ع = {(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٧) ، (٥ ، ٧)}

- الشكلان الآتيان يمثلان المخطط السهمى والمخطط الديكارتى لهذه العلاقة :



المخطط السهمى



المخطط الديكارتى

حاول بنفسك ١

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص

حيث «أ ع ب» تعنى «أ + ب = ٦» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.

ملاحظة

إذا كانت العلاقة ع من س إلى س فإننا نقول إن ع علاقة على س ويكون بيان ع ⊂ س × س

مثال ٢

إذا كانت : س = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢} وكانت ع علاقة على س حيث «أ ع ب»

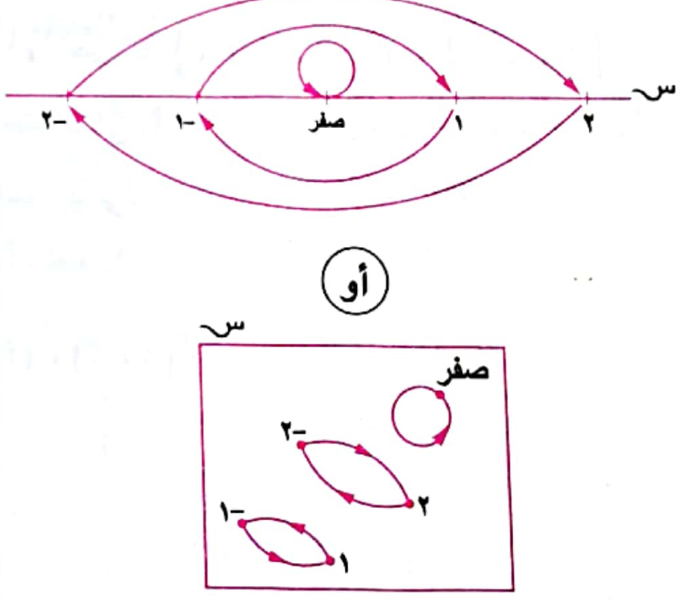
تعنى «أ معكوس جمعى للعدد ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

فاكتب بيان ع ومثلها بمخططين أحدهما سهمى والآخر بيانى.

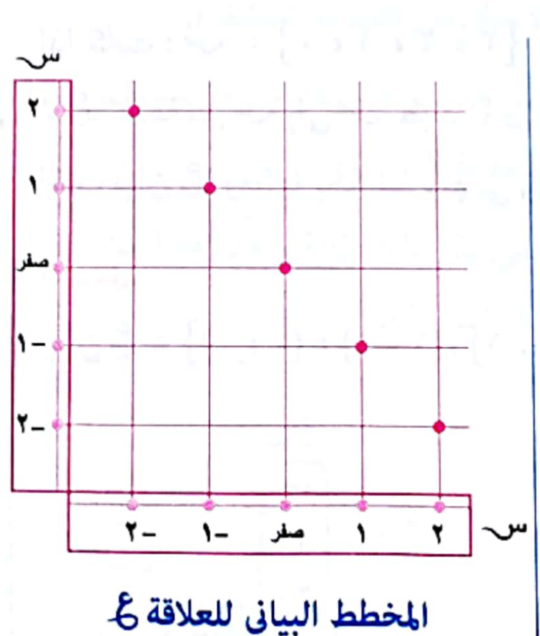
الحل

بيان ع = {(-٢ ، ٢) ، (-١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، -١) ، (٢ ، -٢)}

الشكلان الآتيان يمثلان المخطط السهمى والمخطط البيانى للعلاقة «ع» :



المخطط السهمى للعلاقة ع

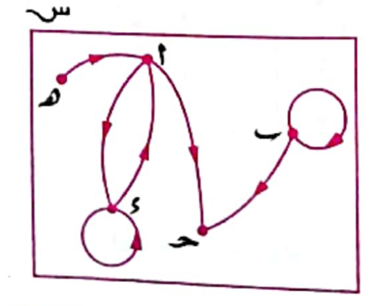


المخطط البيانى للعلاقة ع

مثال ٣

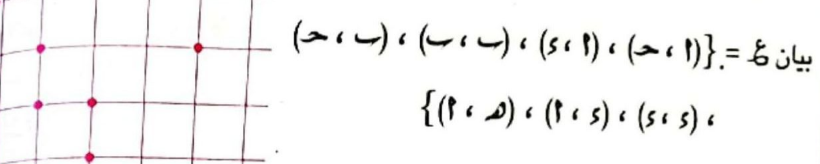
إذا كان المخطط السهمى المقابل يمثل علاقة ع على س

اكتب بيان ع ومثله بمخطط ديكارتى.



الحل

بيان ع = {(ا ، حـ) ، (ا ، ء) ، (ب ، ب) ، (ب ، حـ) ، (ء ، ء) ، (ء ، ا) ، (هـ ، ا)}



حاول بنفسك ٢

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٤} وكانت ع علاقة على س حيث «ا ع ب» تعنى «ا ضعف ب» لكل ا ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثله بمخطط ديكارتى.

ثانيًا الدالة (التطبيق)

مثال تمهيدى

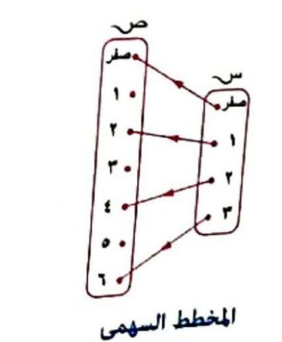
إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

• ، ع علاقة من س إلى ص حيث «ا ع ب» تعنى «ا = $\frac{1}{2}$ ب» لكل ا ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى.

الحل

بيان ع = {(٠ ، ٠) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦)}



المخطط السهمى

المخطط البيانى

نلاحظ فى العلاقة السابقة أن :

كل عنصر من عناصر س قد ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

مثل هذه العلاقة تُسمى «دالة» أو «تطبيق» ، كما تسمى :

- المجموعة س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} بـ «مجال الدالة»
- المجموعة ص = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} بـ «المجال المقابل للدالة».
- المجموعة {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦} بـ «مدى الدالة» وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل للدالة.

المدى — المجال — المجال المقابل

وبصفة عامة :

يُقال لعلاقة من س إلى ص إنها دالة إذا تحققت إحدى الحالات الآتية :

1. فى بيان العلاقة : **كل عنصر** من عناصر س يظهر **مرة واحدة فقط** كمسقط أول فى أحد الأزواج المرتبة التى تنتمى إلى **بيان العلاقة** (لاحظ بيان العلاقة السابقة).
2. فى المخطط السهمى الممثل للعلاقة : **كل عنصر** من عناصر س يخرج منه **سهم واحد فقط** إلى أحد عناصر ص (لاحظ المخطط السهمى للعلاقة السابقة).
3. فى المخطط البيانى الممثل للعلاقة : **كل خط رأسى** تقع عليه **نقطة واحدة فقط** من النقط التى تمثل العلاقة (لاحظ المخطط البيانى للعلاقة السابقة).

مثال ٤

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

فبيّن أى العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص ، وإذا كانت دالة اذكر مداها :

$ع_1$ = {(٢ ، ٣) ، (١ ، ١) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٣)}

$ع_2$ = {(١ ، ٧) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ١)}

$ع_3$ = {(٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٤ ، ٧)}

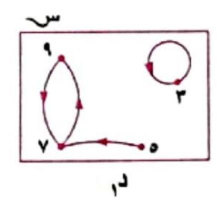
الحل

- $ت_١$ ليست دالة لأن العنصر ٣ ∈ س ظهر كمسقط أول مرتين فى بيان العلاقة وذلك فى الزوجين المرتبين (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧)
- $ت_٢$ ليست دالة لأن العنصر ٣ ∈ س لم يظهر كمسقط أول فى أى من الأزواج المرتبة التى تمثل العلاقة.
- $ت_٣$ دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر مرة واحدة فقط كمسقط أول فى أحد الأزواج المرتبة التى تمثل العلاقة ، مدى الدالة $ت_٣$ هو {٣ ، ٥ ، ٧}

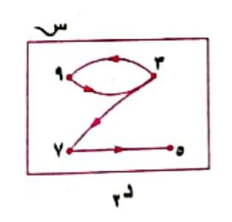
مثال ٥

إذا كانت : س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

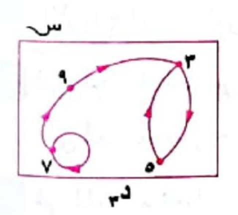
فبيّن أى المخططات السهمية الآتية يمثل دالة من س إلى س ، وفى حالة الدالة اذكر المدى :



$د_١$



$د_٢$



$د_٣$

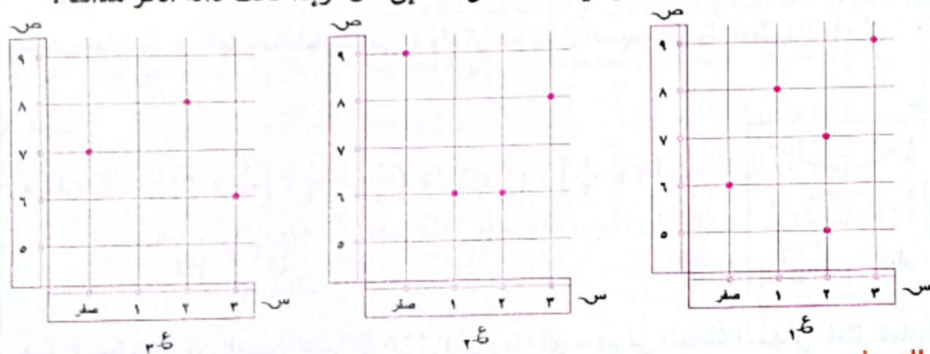
الحل

- $د_١$ دالة لأن كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر س ، مدى الدالة $د_١$ هو {٣ ، ٧ ، ٩}
- $د_٢$ ليست دالة لأن العنصر ٥ ∈ س لم يخرج منه أى سهم ، أو لأن العنصر ٣ ∈ س يخرج منه سهمان.
- $د_٣$ ليست دالة لأن العنصر ٧ ∈ س يخرج منه سهمان.

مثال ٦

إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

فبيّن أى المخططات البيانية الآتية يمثل دالة من س إلى ص وإذا كانت دالة اذكر مداها :



الحل

- $ع_١$ ليست دالة لوجود نقطتين على الخط الرأسى المار بالعنصر ٢ ∈ س
- $ع_٢$ دالة لأن كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط ، مدى الدالة $ع_٢$ هو {٦ ، ٨ ، ٩}
- $ع_٣$ ليست دالة لعدم وجود أى نقطة على الخط الرأسى المار بالعنصر ١ ∈ س

مثال ٧

إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

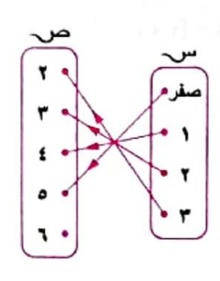
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ + ب = ٥» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.

اذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة من س إلى ص أم لا ، وإذا كانت دالة فأوجد مداها.

الحل

- بيان ع = {(٠ ، ٥) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)}
- ع تمثل دالة من س إلى ص لأن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

مدى الدالة = {٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢}



مثال ٨

إذا كانت: س = {٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$} وكانت ع علاقة على س حيث «أ ع ب» تعني «أ معكوس ضربي للعدد ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي ، واذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة أم لا.

الحل

• بيان ع = {(٣ ، $\frac{1}{3}$) ، (٢ ، $\frac{1}{2}$) ، (١ ، ١) ، ($\frac{1}{2}$ ، ٢) ، ($\frac{1}{3}$ ، ٣)}

• ع لا تمثل دالة لأن العنصر صفر ∈ س لم يخرج منه أي سهم في المخطط السهمي الممثل للعلاقة

حاول بنفسك ٣

إذا كانت: س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٤ ، ٦ ، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «أ = $\sqrt{ب}$» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي. اذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة من س إلى ص أم لا ، وإذا كانت دالة فاذكر مداها.

تمارين 2

على العلاقة - الدالة (التطبيق)



اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كانت: د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن: س تسمى ....

(أ) مدى الدالة د (ب) مجال الدالة د

(ج) المجال المقابل للدالة د (د) قاعدة الدالة د

2 إذا كانت: د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن: ص تسمى ....

(أ) مجال الدالة. (ب) المجال المقابل للدالة.

(ج) مدى الدالة. (د) قاعدة الدالة.

3 إذا كان بيان العلاقة ع هو {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣)}

فإن ع تمثل دالة مداها .... (القليوبية ١٧)

(أ) {١ ، ٢ ، ٤} (ب) {٢ ، ٤ ، ١ ، ٣ ، ٥}

(ج) {٣ ، ٥} (د) ط

4 الشكل المقابل يمثل دالة على س مداها .... (القاهرة ١١)

(أ) {أ} (ب) {أ ، ب ، حـ}

(ج) {أ ، ب} (د) {ب ، حـ}

5 الشكل المقابل يمثل دالة على س مداها ....

(أ) {١ ، ٠ ، -١ ، -٢} (ب) {١ ، ٠ ، -١}

(ج) {٠ ، -١ ، -٢} (د) {١ ، -١ ، -٢}

6 إذا كانت: ع دالة من س إلى ص حيث س = {٢ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٦ ، ٧}

وكانت ع = {(٢ ، ٦) ، (أ ، ٦) ، (٥ ، ٦)} فإن: أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ١٢ (د) ٦



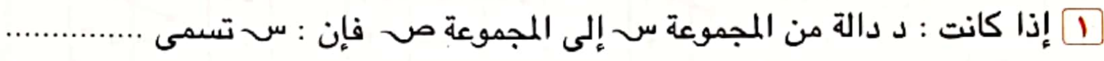
تمارين 2

على العلاقة - الدالة (التطبيق)

اختبار تفاعلي

أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



١ إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن : س تسمى ....

(أ) مدى الدالة د (ب) مجال الدالة د

(جـ) المجال المقابل للدالة د (د) قاعدة الدالة د

٢ إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن : ص تسمى ....

(أ) مجال الدالة. (ب) المجال المقابل للدالة.

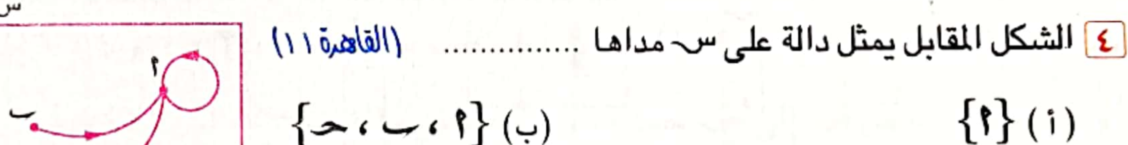
(جـ) مدى الدالة. (د) قاعدة الدالة.

٣ إذا كان بيان العلاقة ع هو {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣)}

فإن ع تمثل دالة مداها .... (القليوبية ١٧)

(أ) {١ ، ٢ ، ٤} (ب) {٢ ، ٤ ، ١ ، ٣ ، ٥}

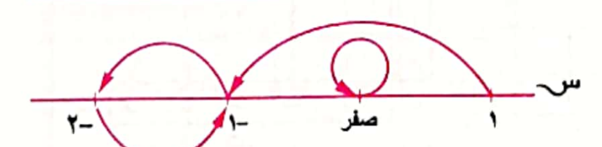
(جـ) {٣ ، ٥} (د) ط



٤ الشكل المقابل يمثل دالة على س مداها .... (القاهرة ١١)

(أ) {أ} (ب) {أ ، ب ، حـ}

(جـ) {أ ، ب} (د) {ب ، حـ}

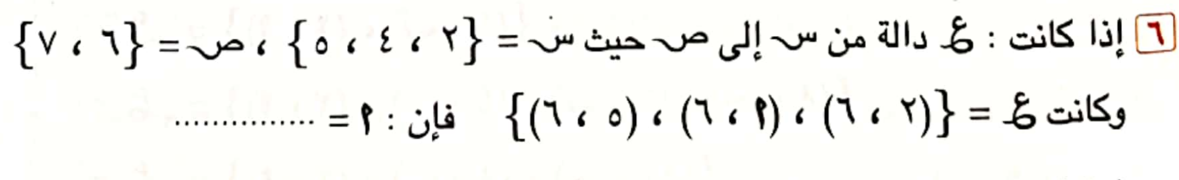


٥ الشكل المقابل يمثل دالة

على س مداها ....

(أ) {١ ، ٠ ، -١ ، -٢} (ب) {١ ، ٠ ، -١}

(جـ) {٠ ، -١ ، -٢} (د) {١ ، -١ ، -٢}



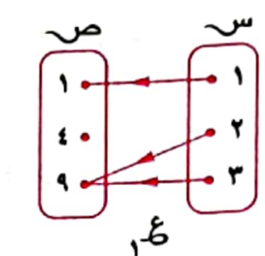
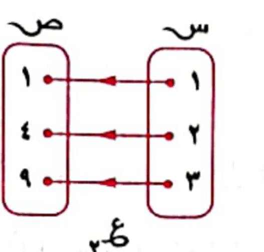
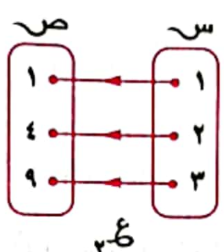
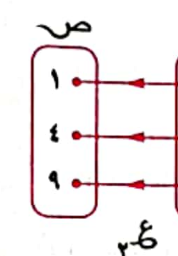
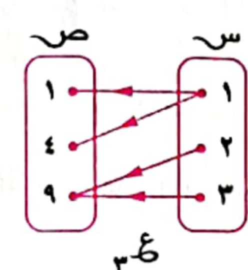
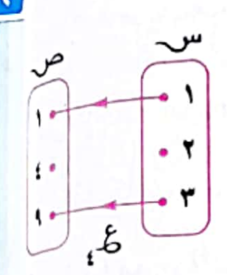
٦ إذا كانت : ع دالة من س إلى ص حيث س = {٢ ، ٤ ، ٥} ، ص = {٦ ، ٧}

وكانت ع = {(٢ ، ٦) ، (أ ، ٦) ، (٥ ، ٦)} فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ٦

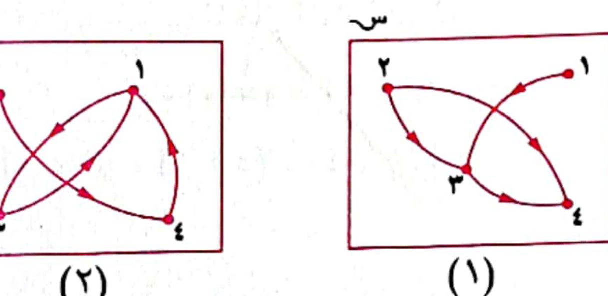
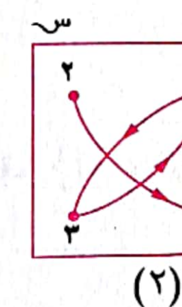
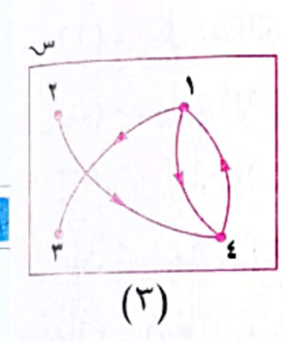
٢ أى من العلاقات التالية تمثل دالة من س إلى ص؟

وإذا كانت العلاقة تمثل دالة ، فأوجد مدى الدالة :

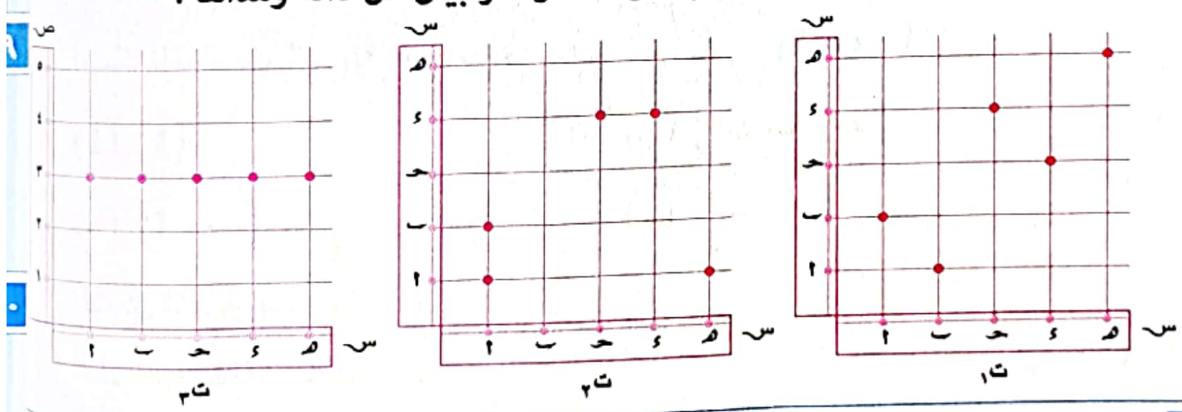
٣ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

فأى من المخططات السهمية الآتية تعبر عن دالة على المجموعة س؟

(١) (٢) (٣)

٤ بيّن أى المخططات البيانية الآتية يعبر عن دالة واذكر بيان كل دالة ومداها :



٥ إذا كانت : س = {أ ، ب ، حـ} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} فأى العلاقات الآ
دالة من س إلى ص وأيها ليست دالة مع ذكر السبب ، وإذا كانت العلاقة دالة اذكر مداها

١ ع$_1$ = {(أ ، ٢) ، (ب ، ٤)}

٢ ع$_2$ = {(أ ، ٢) ، (ب ، ٤) ، (ب ، ٦) ، (حـ ، ٨)}

٣ ع$_3$ = {(أ ، ٢) ، (ب ، ٨) ، (حـ ، ١٠)}

٦ المخطط السهمى المقابل يمثل علاقة ع من س ⟵ ص حيث :

س = {-٣ ، ١ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٨}

ص: ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ — س: -٣ ، ١ ، ٤

١ اكتب بيان ع

٢ هل ع دالة أم لا ؟ ولماذا ؟

٣ ما قيمة س إذا كان : (س ، ٢) ∈ بيان ع ؟ (بنى سويف ١٧ ، سوهاج ١٦)

---

٧ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ = $\frac{1}{3}$ ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع وبين أنها دالة واكتب مداها. (مطروح ١٩ ، سوهاج ١٧ ، المنوفية ١٥)

---

٨ إذا كانت : س = {٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «أ = ٢ ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

فاكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى. (أسوان ١١)

---

٩ 📖 إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ + ب = ٧» لكل أ ∈ س

، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى. (بورسعيد ١٧ ، بنى سويف ١٥)

---

١٠ 📖 إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٤ ، ٧} ، ص = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٦}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ + ب < ٨» لكل أ ∈ س

، ب ∈ ص اكتب بيان ع ، ومثلها بمخطط سهمى. هل ع دالة ؟ ولماذا ؟ (الإسكندرية ١٨)

---

١١ 📖 إذا كانت : س = {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ، ص = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ ≥ ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى وآخر بيانى.

٢٥ إذا كانت : س = {-٢ ، ٢ ، ٥} ، ص = {٣ ، ٧ ، ل} وكانت ع دالة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «ب = $أ^٢$ - ١» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ أوجد قيمة ل ٢ مثل الدالة ع بمخطط سهمى.

٢٦ إذا كانت : س = {٠ ، ٤ ، ١٦} ، ص = {٠ ، ٢ ، ٤}

فبيِّن أى العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص :

١ $ع_١$ حيث «أ $ع_١$ ب» تعنى «أ = $ب^٢$» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

٢ $ع_٢$ حيث «أ $ع_٢$ ب» تعنى «أ = $\sqrt{ب}$» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

٣ $ع_٣$ حيث «أ $ع_٣$ ب» تعنى « $\frac{١}{٢}$ أ = ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

٢٧ إذا كانت : ع علاقة على مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) حيث «أ ع ب» تعنى «أ × ب = ...
لكل أ ∈ ط ، ب ∈ ط

١ إذا كان : س ع ٤ **فأوجد قيمة : س**

٢ إذا كان : ص ع ٣ ص **فأوجد قيمة : ص**

٢٨ إذا كانت : ع علاقة على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ($ح_+$) حيث «س ع ص»
تعنى «$ص^٢$ = ٢ س» لكل س ∈ $ح_+$ ، ص ∈ $ح_+$ وكان كل من الأزواج المرتبة التالية
ينتمى لبيان ع : (أ ، ٢) ، ($\frac{٢}{٩}$ ، ب) ، (حـ ، ٣) ، ($\frac{٩}{٣٢}$ ، ء)
أوجد قيمة كل من : أ ، ب ، حـ ، ء

٢٩ إذا كانت : س = {١ ، ٠ ، -١}
وكانت $ع_١$ علاقة المعكوس الجمعى على س ، $ع_٢$ علاقة المعكوس الضربى على س
أوجد : ع = $ع_١$ ∩ $ع_٢$ ، وهل ع تمثل دالة على س ؟

٣٠ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١٣ ، ٣١ ، ٦٥ ، ٢٣} وكانت ع علاقة
من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ رقم من أرقام العدد ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمى.

٢ بيِّن أيًا مما يلى صواب مع ذكر السبب : ٢ ع ٦٥ ، ١ ع ٣١ ، ٣ ع ١٣

٣ اكتب بطريقة السرد : م = {(ص ، ٢٣) : (ص ، ٢٣) ∈ ع}

٣١ إذا كانت : أ = {-١ ، ١ ، ٢} ، ب = {ء : ء ∈ ط} وكانت ع علاقة من أ إلى ب حيث «س ع ص» تعنى «ص = ٢ س + ٣» لكل س ∈ أ ، ص ∈ ب أوجد بيان ع ومثله بمخطط سهمى.

٣٢ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

بيِّن مع ذكر السبب أيًا مما يأتى يمثل علاقة من س إلى ص :

١ ل = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٣)}

٢ م = {(٢ ، ٤) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

٣٣ إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٥} ، ع دالة على س ، بيان ع = {(أ ، ٣) ، (ب ، ١) ، (١ ، ٥)}

أوجد : ١ مدى الدالة.

٢ القيمة العددية للمقدار : أ + ب (أسوان ٢٠ ، القليوبية ٢٠)

للمتفوقين

٣٤ إذا كانت : س = {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢} ، ص = [٠ ، ٤] وكانت ع علاقة من س إلى ص بحيث «أ ع ب» تعنى «$أ^٢$ = ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص فاكتب بيان ع واذكر هل العلاقة ع دالة من س إلى ص أم لا مع بيان السبب.

٣٥ إذا كانت ع دالة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ تقسم ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، وإذا كان : س ∪ ص = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ١١ ، ١٤ ، ٩ ، ٣٥} ، وكان : ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ١٢

أوجد كلًا من : س ، ص ثم اكتب بيان الدالة ع وأوجد مداها.

٣٦ إذا كانت ع دالة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ مضاعف ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، وإذا كان : ن(س) = ٤ ، ن(ص) = ٢ ، س ∪ ص = {٤ ، ٨ ، ٩ ، ٢٧}

أوجد كلًا من : س ، ص ثم اكتب بيان الدالة ع وأوجد مداها.

الدرس

3

التعبير الرمزى عن الدالة - دوال كثيرات الحدود

التعبير الرمزى عن الدالة

* يُرمز عادةً للدالة من المجموعة س إلى المجموعة ص بأحد الحروف مثل : د أو ر أو ... وتكتب رياضيًا :

د : س ⟵ ص وتُقرأ د دالة من س إلى ص

أ، ر : س ⟵ ص وتُقرأ ر دالة من س إلى ص وهكذا ...

* إذا كانت د : س ⟵ ص وكان الزوج المرتب (س ، ص) ينتمى إلى بيان الدالة د فإن العنصر ص يسمى صورة العنصر س بواسطة الدالة د

ونكتب ذلك بإحدى الصورتين :

د : س ⟼ ص وتُقرأ د ترسم س إلى ص

أ، د : د (س) = ص وتُقرأ د دالة حيث د (س) = ص

فمثلًا : إذا كانت د : س ⟵ ص بحيث : د : س ⟼ س^{٢} فإن : د : ٣ ⟼ ٩

ويمكن أن نكتب ذلك على الصورة : د (س) = س^{٢} ومنها د (٣) = ٩

ملاحظة

الصورة الرياضية د (س) = س^{٢} تُسمى بقاعدة الدالة د ، وتستخدم لإيجاد صورة كل عنصر من عناصر المجال بواسطة الدالة د

تذكر أن

إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص أى د : س ⟵ ص فإن :

1. س تُسمى «مجال الدالة د»
2. ص تُسمى «المجال المقابل للدالة د»
3. مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بالدالة د تُسمى «مدى الدالة د» وهى مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

مثال 1

إذا كانت : س = {-١ ، ٠ ، ١} ، ص = {٠ ، -١ ، -٢}

وكانت الدالة د : س ⟵ ص حيث د (س) = س^{٢} - ١

فأوجد بيان الدالة د ومثلها بمخطط سهمى واكتب مداها.

الحل

∵ د (س) = س^{٢} - ١

∴ د (-١) = (-١)^{٢} - ١ = ٠ ∴ (-١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د

، د (٠) = (٠)^{٢} - ١ = -١ ∴ (٠ ، -١) ∈ بيان الدالة د

، د (١) = (١)^{٢} - ١ = ٠ ∴ (١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د

∴ بيان د = {(-١ ، ٠) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ٠)}

، مدى الدالة د = {٠ ، -١}

س: -١ ، ٠ ، ١

ص: ٠ ، -١ ، -٢

ملاحظة

إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى نفسها أى د : س ⟵ س

فنقول إن : «د دالة على س»

مثال ٢

إذا كانت د : ط ← ط حيث ط هى مجموعة الأعداد الطبيعية ، وكانت : د (س) = س + ١

فأوجد : د (٠) ، د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ثم ارسم جزءًا من الشبكة التربيعية للحاصل الديكارتى ط × ط ومثل عليها خمسة عناصر من هذه الدالة. ما هو مدى د ؟

الحل

د (س) = س + ١ لكل س ∈ ط (تعنى أن : صورة أى عدد طبيعى بالدالة د هو العدد + ١)

∴ د (٠) = ٠ + ١ = ١ ، د (١) = ٢

، د (٢) = ٣ ، د (٣) = ٤ ، د (٤) = ٥

∴ الأزواج المرتبة (٠ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥)

هى خمسة عناصر من عناصر الدالة د

- مدى د هو جميع الأعداد الطبيعية عدا الصفر

(لأنه لا يوجد عدد طبيعى إذا أُضيف إلى ١ يكون الناتج صفرًا)

أى أن : مدى د = ط − {٠}

حاول بنفسك ١

إذا كانت : س = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت الدالة د : س ← ص حيث د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

فاكتب بيان د ومثلها بمخطط بيانى وأوجد مداها.

دوال كثيرات الحدود

تعريف

الدالة د : ح ← ح ، د (س) = $أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ... + أ_ن س^ن$

حيث $أ_٠ ، أ_١ ، أ_٢ ، ... ، أ_ن$ ∈ ح ، ن ∈ ط تسمى دالة كثيرة حدود.

أى أن :

الدالة كثيرة الحدود هى دالة قاعدتها حد أو مقدار جبرى ويتوفر فيها الشرطان الآتيان :

١. كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح
٢. قوة (أس) المتغير س فى أى حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعى.

وفيما يلى أمثلة لدوال كثيرات الحدود :

- د : د (س) = ٢ س + ٥
- ر : ر (س) = $س^٢$ − ٢ س + ١
- ق : ق (س) = ٨
- ن : ن (س) = ١ + $\sqrt{٢}$ س − ٩ $س^٣$

ملاحظة

إذا كان أى من المجال أو المجال المقابل للدالة ليس مجموعة الأعداد الحقيقية فإن الدالة ليست كثيرة حدود.

فمثلًا : • د : د (س) = $\sqrt{س}$ ليست دالة كثيرة حدود

لأن د (س) غير موجودة فى ح إذا كانت س تساوى عددًا سالبًا.

فمثلًا : د (−١) ∉ ح لأن : $\sqrt{-١}$ ∉ ح

وبالتالى فإن مجال الدالة د ليس مجموعة الأعداد الحقيقية.

- ر : ر (س) = $\frac{١}{س}$ ليست دالة كثيرة حدود

لأن ر (س) غير موجودة فى ح إذا كانت س = ٠ أى أن : ر (٠) ∉ ح

وبالتالى فإن مجال الدالة ر ليس مجموعة الأعداد الحقيقية.

ملاحظة

عند بحث ما إذا كانت دالة تمثل دالة كثيرة حدود أم لا فإننا لا نقوم بتبسيط قاعدتها.

فمثلًا : الدالة $د_١$: $د_١$ (س) = س $\left(س + \frac{١}{س}\right)$ لا تمثل دالة كثيرة حدود لأن : $د_١$ (٠) ∉ ح

بينما الدالة $د_٢$: $د_٢$ (س) = $س^٢$ + ١ تمثل دالة كثيرة حدود.

ولاحظ أن : س $\left(س + \frac{١}{س}\right)$ = $س^٢$ + ١ لجميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

درجة الدالة كثيرة الحدود

درجة الدالة كثيرة الحدود هى أكبر قوة للمتغير فى قاعدة الدالة.

فمثلاً : • الدالة $د_{١}$: $د_{١}(س) = ٣ س − \frac{١}{٢}$ من الدرجة الأولى (دالة خطية)

• الدالة $د_{٢}$: $د_{٢}(س) = \sqrt{٥} س^{٢} − ٣ س + ٤$ من الدرجة الثانية (دالة تربيعية)

• الدالة $د_{٣}$: $د_{٣}(س) = س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٤$ من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية)

ملاحظة

الدالة د : د(س) = أ حيث $أ \in ح − \{٠\}$ دالة كثيرة حدود من الدرجة صفر (دالة ثابتة)

مثل د : د(س) = ٣

وفى حالة أ = ٠ أى عندما د(س) = ٠ فإن الدالة د ليس لها درجة.

مثال ٣

إذا كانت د : ح ← ح فاذكر درجة د :

١ $د(س) = ٥ − ٣ س$

٢ $د(س) = ٣ س − س^{٢}$

٣ $د(س) = ٥ س − ٣ س^{٢} + س^{٣}$

٤ $د(س) = س^{٢} (٢ + س)^{٢}$

٥ $د(س) = س (س^{٣} + س^{٢}) − س^{٢} (س^{٢} − ٢ س)$

الحل

١ د دالة من الدرجة الأولى.

٢ د دالة من الدرجة الثانية.

٣ د دالة من الدرجة الثالثة.

٤ ∵ $د(س) = س^{٢} (٤ + ٤ س + س^{٢})$

$= ٤ س^{٢} + ٤ س^{٣} + س^{٤}$

∴ د دالة من الدرجة الرابعة.

لاحظ أنه

عند بحث درجة الدالة يجب تبسيط قاعدتها إلى أبسط صورة قبل تعيين درجتها.

٥ ∵ $د(س) = س^{٤} + س^{٣} − س^{٤} + ٢ س^{٣} = ٣ س^{٣}$

∴ د دالة من الدرجة الثالثة.

حاول بنفسك ٢

أى من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة كثيرة حدود وعين درجتها إذا كانت كثيرة حدود :

١ $د_{١}(س) = س (س^{٢} − ٣)$

٢ $د_{٢}(س) = س \left(\frac{٢}{س} + ٥\right)$

٣ $د_{٣}(س) = س^{٢} − \sqrt{س} + ١$

٤ $د_{٤}(س) = س^{٢} − (س^{٢} − ٤)$

مثال ٤

إذا كانت د : $د(س) = س^{٢} − ٢ س + ٥$

١ **أوجد :** د(١) ، د(٠) ، د(−٢) ، $د\left(\frac{١}{٢}\right)$ ، $د(\sqrt{٥})$

٢ **أثبت أن :** $د(٢\sqrt{٢} + ١) = ٢ د(١ − \sqrt{٢})$

الحل

١ $د(١) = (١)^{٢} − ٢ × (١) + ٥ = ١ − ٢ + ٥ = ٤$

وبالمثل : د(٠) = ٥ ، د(−٢) = ١٣ ، $د\left(\frac{١}{٢}\right) = ٤\frac{١}{٤}$

، $د(\sqrt{٥}) = ١٠ − ٢\sqrt{٥}$

٢ ∵ $د(٢\sqrt{٢} + ١) = (٢\sqrt{٢} + ١)^{٢} − ٢(٢\sqrt{٢} + ١) + ٥$

$= ٨ + ١ + ٤\sqrt{٢} − ٤\sqrt{٢} − ٢ + ٥ = ١٢$ (١)

، $د(١ − \sqrt{٢}) = (١ − \sqrt{٢})^{٢} − ٢(١ − \sqrt{٢}) + ٥$

$= ١ + ٢ − ٢\sqrt{٢} − ٢ + ٢\sqrt{٢} + ٥ = ٦$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $د(٢\sqrt{٢} + ١) = ٢ د(١ − \sqrt{٢})$

مثال ٥

إذا كانت : د (س) = ٢ س + ب ، ر (س) = س^{٢} + ب

وكان : د (٢) + ر (−٤) = ٣٠ **فأوجد :** د (−٢) − ر (٢)

الحل

∵ د (٢) = ٢ × ٢ + ب = ٤ + ب ، ر (−٤) = (−٤)^{٢} + ب = ١٦ + ب

، ∵ د (٢) + ر (−٤) = ٣٠ ∴ ٤ + ب + ١٦ + ب = ٣٠

∴ ٢٠ + ٢ ب = ٣٠ ∴ ٢ ب = ٣٠ − ٢٠ = ١٠

∴ ب = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

∴ د (س) = ٢ س + ٥ ، ر (س) = س^{٢} + ٥

∴ د (−٢) = ٢ × (−٢) + ٥ = ١ ، ر (٢) = ٢^{٢} + ٥ = ٩

∴ د (−٢) − ر (٢) = ١ − ٩ = −٨

حاول بنفسك ٣

إذا كانت : د (س) = ٢ س + ٥ ، ر (س) = س − ٦

فأثبت أن : د (٢) + ٣ ر (٣) = صفر

تمارين 3

على التعبير الرمزى عن الدالة - دوال كثيرات الحدود





أسئلة كتاب الوزارة

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمى .... (مطروح ١٦، دمياط ١٥)

(أ) القاعدة. (ب) المجال. (جـ) المدى. (د) المجال المقابل.

2 إذا كانت الدالة د : س ⟵ ص فإن مدى الدالة د ⊂ .... (القاهرة ١٧)

(أ) س × ص (ب) س (جـ) ص × س (د) ص

3 الدالة د حيث د (س) = س^٤^ − ٢ س^٣^ + ٧

كثيرة حدود من الدرجة .... (ج. سيناء ١٩، السويس ١٥)

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

4 الدالة د : د (س) = س (س − ٢ س^٢^) هى دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

5 الدالة د : د (س) = س^٢^ − (س^٢^ − ٣ س) كثيرة حدود من

الدرجة .... (بورسعيد ١٦)

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

6 الدالة د : د (س) = س^٢^ (س − ٣)^٢^

هى دالة كثيرة حدود من الدرجة .... (أسوان ١٣)

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

7 الدالة د : د (س) = (س − ٥)^٣^ هى دالة كثيرة حدود من الدرجة .... (قنا ١١)

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

8 إذا كانت : د (س) = س^٢^ − س + ٣ فإن : د (−٢) = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ٥ (د) ٩

9 إذا كانت : د (س) = س^٢^ − $\sqrt{2}$ س فإن : د ($\sqrt{2}$) = ... (الدقهلية ١١)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) صفر

١٠ إذا كانت الدالة د : ص ⟵ ص حيث د (س) = $س^٢$

فإن : د (٢) + د (−٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) −٨

١١ إذا كانت : د (س) = ك س + ٨ ، د (٢) = صفر

فإن : ك = ... (الدقهلية ٢٠ ، الشرقية ١٥)

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) −٤

١٢ إذا كانت : د (س) = س − ٥ وكان : $\frac{١}{٢}$ د (أ) = ٣ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٦

١٣ إذا كان : د : ح ⟵ ح حيث د (س) = $س^{ك - ٢}$ + ٣ وكان : د (٢) = ١١

فإن : ك = ... (الشرقية ٢٠)

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) −٣

١٤ إذا كان : (−١ ، ٠) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = م س + ٢ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ٢ (د) −٢

١٥ إذا كان : (٣ ، ص) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = س + ٢ فإن : ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

١٦ إذا كان : (أ ، أ) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = ٢ س + ٣ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) −٢

١٧ إذا كانت : د (س + ٣) = س − ٣ فإن : د (٧) = ... (الدقهلية ١٩)

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) ١٠

١٨ إذا كانت : س = {٢ ، ٤ ، ٦} وكان ن(ص) = ٤ وكانت الدالة د : س ⟵ ص

، د (س) = $س^٢$ − ١ فإن : ص يمكن أن تكون ....

(أ) {٣ ، ٧ ، ١٣} (ب) {٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٤٥}

(جـ) {٣ ، ١٥ ، ٣٥} (د) {٣ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٣٥}

١٩ إذا كانت : د $(س) = ن س^{٢} + ٢ س^{ن} - ٣$ فإن مجموعة قيم ن الممكنة التى تجعل د دالة من الدرجة الثانية هى .... (الدقهلية ١٦)

(أ) $\{٢ ، ٣\}$ (ب) $\{١ ، -١\}$ (جـ) $\{٢ ، ١ ، ٠\}$ (د) $\{٢ ، ١\}$

٢ أى من الدوال الآتية تمثل كثيرة حدود :

١ د : د $(س) = ٢ س - ٥$

٢ د : د $(س) = ٣$

٣ د : د $(س) = س + \frac{١}{س}$

٤ د : د $(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٣$

٥ د : د $(س) = س^{٢} + \sqrt{س} + ٨$

٦ د : د $(س) = س \left(س + \frac{١}{س} - ٢\right)$

٧ د : د $(س) = \sqrt[٣]{س} + ٨$

٨ د : د $(س) = س \left(س^{٢} + س^{-٢} - ٤\right)$

٣ إذا كانت د : ح ⟵ ح ، اذكر درجة د ثم أوجد د (-٢) ، د (٠) ، د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ حيث :

١ د $(س) = ٣ - ٢ س$

٢ د $(س) = س^{٢} - ٤$

٤ إذا كانت د : د $(س) = ٢ س^{٢} - ٥ س + ٢$ أثبت أن : د $(٢) =$ د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ (الأقصر ١٤)

٥ إذا كانت : د $(س) = ٢ س - ١$ أثبت أن : د $(٢) - ٣$ د $(١) =$ صفر (الغربية ١١)

٦ إذا كانت : د $(س) = س^{٢} - ٣ س$ ، ر $(س) = س - ٣$

١ أوجد : د $(\sqrt{٢}) + ٣$ ر $(\sqrt{٢})$

٢ أثبت أن : د $(٣) =$ ر $(٣) =$ صفر

(بورسعيد ٢٠ ، قنا ١٩ ، الإسكندرية ١٨ ، المنيا ١٧)

٧ إذا كانت د : د $(س) = س^{٢} - ٢ س - ٥$ أثبت أن : د $(١ + \sqrt{٦}) =$ د $(١ - \sqrt{٦}) = ٠$

٨ الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٥ ، أ = صفر ، ب عدد حقيقي لا يساوى الصفر

١ أوجد : درجة الدالة د

٢ إذا كانت د (٣) = ١١ فأوجد قيمة : ب (المنيا ١٨)

٩ إذا كانت : د (س) = ٥ س − ب ، ر (س) = س − ٢ ب

وكان د (١) + ر (٣) = −٧ فأوجد : د (٣) + ر (١)

١٠ إذا كانت د : ص ← ط حيث د (س) = (س − ٣)^{٢} ، ر : ص ← ط

حيث ر (س) = س − ٣ فأوجد : قيمة س التى تجعل د (س) = ر (س)

١١ إذا كانت د دالة على س حيث س = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت د (٣) = ٣ ، د (٤) = ٥ ، د (٥) = ٥ ، د (٦) = ٥

١ مثل د بمخطط سهمى. ٢ اكتب بيان د واذكر مداها. (الإسماعيلية ١٥)

١٢ إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٢} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

وكانت د : س ← ص حيث د (س) = ٥ − س

١ أوجد : مدى الدالة د ٢ ارسم مخططًا بيانيًا للدالة د (الوادى الجديد ١٧)

١٣ إذا كانت الدالة ت : ط ← ط حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية

، ت : س ↤ ٢ س + ٣

١ أوجد : ت (٠) ، ت (١) ، ت (٢) ، ت (٣) ، ت (٤) ، ت (٥)

٢ مثل خمسة عناصر من عناصر ت على جزء من الشبكة التربيعية للحاصل الديكارتى ط × ط

٣ ما هو مدى ت ؟

١٤ إذا كانت د : ص ← ص ، ص مجموعة الأعداد الصحيحة

، د (س) = $س^{٢}$ − ٢ س − ٣

١ أوجد : د (٤) ، د (٣) ، د (٢) ، د (١) ، د (٠) ، د (−١) ، د (−٢)

٢ مثل سبعة عناصر من عناصر د على الشبكة التربيعية للحاصل الديكارتى ص × ص

٣ إذا كانت : د (س) = ٥ فأوجد قيمة : س «٤ أ −٢»

١٥ إذا كان : د (س) = أ س + ب وكان : د (أ) = ب

فأوجد قيمة المقدار : أ $ب^{٢}$ + ٥ (الشرقية ١٩) «٥»

١٦ إذا كان بيان الدالة د = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١)}

١ اكتب مجال الدالة د

٢ اكتب مدى الدالة د

٣ اكتب قاعدة للدالة د (الأقصر ١٩ ، ش. سيناء ١٧ ، دمياط ١٦)



١٧ إذا كانت : د (س) = ٢ $س^{٢}$ + ب س + حـ

وكانت : د (س) = ٠ عندما س ∈ {٠ ، ٣}

فأوجد قيمة كل من : ب ، حـ «−٦ ، ٠»



الدرس 4

دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولاً: الدالة الخطية

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = أ س + ب ، أ ∈ ح − {٠} ، ب ∈ ح

تسمى دالة خطية (وهى كثيرة حدود من الدرجة الأولى)

* أمثلة لدوال خطية :

• د : ح ← ح ، د (س) = س − ١

• د : ح ← ح ، د (س) = ٢ س + ١

• د : ح ← ح ، د (س) = ٣ س

لاحظ أنه

فى كل من الدوال المجاورة أس المتغير س يساوى ١ لذلك فإن كلًا منها دالة من الدرجة الأولى.

التمثيل البيانى للدالة الخطية

* الدالة الخطية د : ح ← ح حيث د (س) = أ س + ب ، أ ∈ ح − {٠} ، ب ∈ ح

يمثلها بيانيًا **خط مستقيم** يقطع :

− محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

− محور السينات فى النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

* عند تمثيل الدالة الخطية يُكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة. ويمكنك إيجاد زوج مرتب ثالث للتحقق أن النقط الثلاث الممثلة للأزواج المرتبة تقع على خط مستقيم واحد.

مثال ١

مثل بيانيًا :

١ د : د (س) = ٢ س − ٣

٢ ر : ر (س) = −$\frac{١}{٢}$ س

الحل

١ لتمثيل هذه الدالة بيانيًا :

• نعين ثلاثة أزواج مرتبة تنتمى إلى بيان د : د (س) = ٢ س − ٣

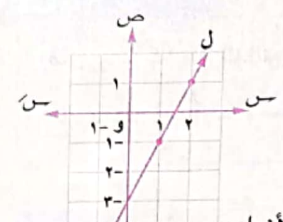
∴ د (−١) = ٢ × (−١) − ٣ = −٥ ∴ (−١ ، −٥) ∈ د

، د (١) = ٢ × ١ − ٣ = −١ ∴ (١ ، −١) ∈ د

، د (٢) = ٢ × ٢ − ٣ = ١ ∴ (٢ ، ١) ∈ د

• يمكن ترتيب هذه الأزواج المرتبة فى جدول كالتالى :

س	−١	١	٢
ص = د (س)	−٥	−١	١



• نعين فى المستوى الديكارتى النقط الثلاث التى تمثل هذه الأزواج المرتبة ونرسم المستقيم ل المار بأى نقطتين منها ونتحقق من أن النقطة الثالثة تقع على نفس المستقيم فيكون هذا المستقيم هو الشكل البيانى للدالة د

لاحظ أنه : يمكن إيجاد نقطتى التقاطع مع المحورين واستخدامهما فى التمثيل :

− نقطة التقاطع مع محور الصادات = (٠ ، ب) = (٠ ، −٣)

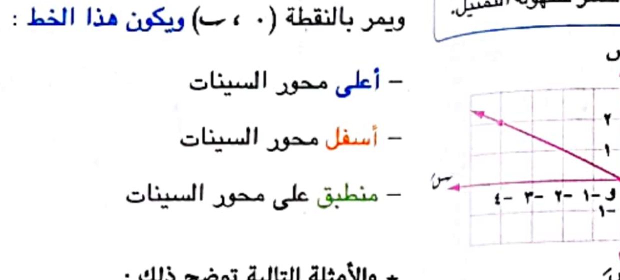
− نقطة التقاطع مع محور السينات = ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠) = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

٢ ∵ ر (س) = $-\frac{1}{2}$ س

س	٠	٢	−٤
ص = ر (س)	٠	−١	٢

لاحظ أنه

إذا كان معامل س كسرًا يفضل أن نختار أعدادًا تقبل القسمة على مقام هذا الكسر لسهولة التمثيل.



من الشكل المقابل لاحظ أن :

المستقيم ل يمر بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)

وبصفة عامة

الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = أ س ، أ ∈ ح*

يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

حاول بنفسك ١

مثل بيانيًا كلًا من الدالتين الخطيتين الآتيتين :

١ د : د (س) = ٢ س − ٣ ‏ ‏ ‏ ‏ ٢ د : د (س) = ٢ س

ثانيًا الدالة الثابتة

تعريف

الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ب ، ب ∈ ح تسمى دالة ثابتة.

فمثلًا :

د : د (س) = ٥ دالة ثابتة حيث :

د (١) = ٥ ، د (٠) = ٥ ، د (−٢) = ٥ ، ... وهكذا

التمثيل البيانى للدالة الثابتة

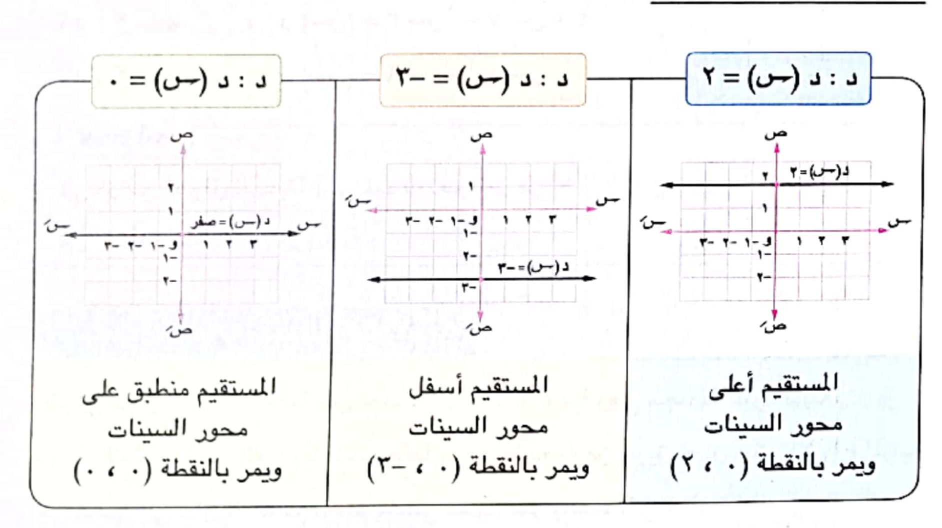
الدالة الثابتة د : د (س) = ب (حيث ب ∈ ح) يمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ب) ويكون هذا الخط :

– أعلى محور السينات ‏ ‏ إذا كان : ب > ٠

– أسفل محور السينات ‏ ‏ إذا كان : ب < ٠

– منطبق على محور السينات ‏ ‏ إذا كان : ب = ٠

* والأمثلة التالية توضح ذلك :



المستقيم أعلى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ٢)	المستقيم أسفل محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، −٣)	المستقيم منطبق على محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ٠)

حاول بنفسك ٢

مثل بيانيًا د : د (س) = −١ ثم أوجد ما يأتى :

١ درجة الدالة د ‏ ‏ ‏ ‏ ٢ د (٥)

٣ د (٢) + د (−٢) ‏ ‏ ‏ ‏ ٤ د (−س)

ثالثًا الدالة التربيعية

تعريف

الدالة د : ح ⟵ ح حيث $د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$ ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ $\neq$ ٠ . تُسمى دالة تربيعية (وهى كثيرة حدود من الدرجة الثانية).

* أمثلة لدوال تربيعية :

- د : ح ⟵ ح ، $د(س) = س^{٢}$
- د : ح ⟵ ح ، $د(س) = س^{٢} - ٢$
- د : ح ⟵ ح ، $د(س) = ٣س^{٢} - ٧س + ٢$
- د : ح ⟵ ح ، $د(س) = ٦ - س^{٢} + س$

لاحظ أنه

فى كل من الدوال السابقة أكبر قوة للمتغير س هى ٢ لذلك فإن كلًا منها دالة من الدرجة الثانية.

التمثيل البيانى للدالة التربيعية

نعلم أن مجال الدالة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية وهى مجموعة غير منتهية ، ولذلك لتمثيل هذه الدالة بيانيًا فإننا نمثلها على فترة معينة عن طريق تعيين بعض الأزواج المرتبة التى تنتمى إلى بيان الدالة ثم نرسم منحنى ممهدًا يمر بالنقط التى تمثلها.

والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال ٢

مثل بيانيًا كلًا من الدالتين التربيعيتين الآتيتين :

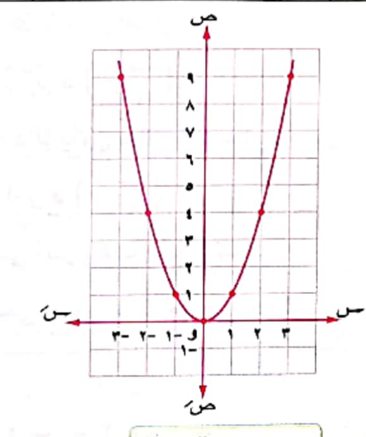
١ د : د(س) = $س^{٢}$ متخذًا س $\in$ [−٣ ، ٣]

٢ د : د(س) = $-س^{٢}$ متخذًا س $\in$ [−٣ ، ٣]

الحل

١ د(س) = $س^{٢}$

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



لاحظ أن : معامل $س^{٢} > ٠$

- النقطة (٠ ، ٠) هى نقطة رأس المنحنى وهى نقطة قيمة صغرى لأن المنحنى يقع بتمامه فوقها.
- القيمة الصغرى للدالة هى صفر وهى الإحداثى الصادى لنقطة رأس المنحنى.
- المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات أى أن محور الصادات هو محور تماثل المنحنى ومعادلته هى س = ٠ .

٢ د(س) = $-س^{٢}$

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	−٩	−٤	−١	٠	−١	−٤	−٩

لاحظ أن : معامل $س^{٢} < ٠$

- النقطة (٠ ، ٠) هى نقطة رأس المنحنى وهى نقطة قيمة عظمى لأن المنحنى يقع بتمامه أسفلها.
- القيمة العظمى للدالة هى صفر وهى الإحداثى الصادى لنقطة رأس المنحنى.
- المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات أى أن محور الصادات هو محور تماثل المنحنى ومعادلته هى س = ٠ .

وبصفة عامة

الدالة التربيعية د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية

، أ ≠ صفر يكون لها الخصائص الآتية :

١ نقطة رأس المنحنى = ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$))

٢ إذا كان أ (معامل س^{٢}) موجبًا فإن منحنى الدالة يكون مفتوحًا لأعلى

وفى هذه الحالة يكون للدالة قيمة صغرى تساوى د ($\frac{-ب}{٢أ}$)

٣ إذا كان أ (معامل س^{٢}) سالبًا فإن منحنى الدالة يكون مفتوحًا لأسفل

وفى هذه الحالة يكون للدالة قيمة عظمى تساوى د ($\frac{-ب}{٢أ}$)

٤ منحنى الدالة يكون متماثلًا حول الخط الرأسى المار بنقطة رأس المنحنى

وتكون معادلة هذا الخط : س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ويُسمى محور تماثل منحنى الدالة.

مثال ٣

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ متخذًا س ∈ [−٢ ، ٤]

ومن الرسم أوجد : ١ نقطة رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل.

٣ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

الحـــل

∵ د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

من الرسم نجد أن :

١ نقطة رأس المنحنى : (١ ، −٤)

٢ معادلة محور التماثل : س = ١

«وهو مستقيم يوازى محور الصادات ويمر بنقطة رأس المنحنى».

٣ القيمة الصغرى للدالة = −٤



ملاحظة

يمكن تكوين الجدول المستخدم فى رسم الدالة السابقة باستخدام الآلة الحاسبة العلمية التى تدعم نظام (Table) على النحو التالى :

١ تهيئة الحاسبة على نظام (Table) ، وذلك بالضغط على مفتاح MODE ثم اختيار نظام (Table)

٢ إدخال البيانات : نكتب قاعدة الدالة السابقة ، وذلك بالضغط على المفاتيح التالية :

ابدأ ← ALPHA) x² − 2 ALPHA) − 3

٣ نضغط على المفتاح = ثم فى بداية الفترة START نكتب (−) 2 ثم نضغط =

٤ نكتب فى نهاية الفترة END? الرقم 4 ثم نضغط =

٥ نحدد بعد ذلك طول الفترة STEP? ونختار الرقم 1 ثم نضغط =

وبذلك يتم إنشاء الجدول فى الحاسبة ، ويمكن التنقل باستخدام

المفتاح REPLAY إلى أعلى وإلى أسفل.

• وللخروج من البرنامج : نضغط MODE SETUP ثم 1

	x	$F(x)$
1	-2	5
2	-1	0
3	0	-3
4	1	-4
5	2	-3
6	3	0
7	4	5

٤٤

مثال ٤

ارسم الشكل البيانى للدالة د : د (س) = − س^{٢} + ٣ س + ٢ متخذًا س ∈ [−١ ، ٤]

ثم أوجد :

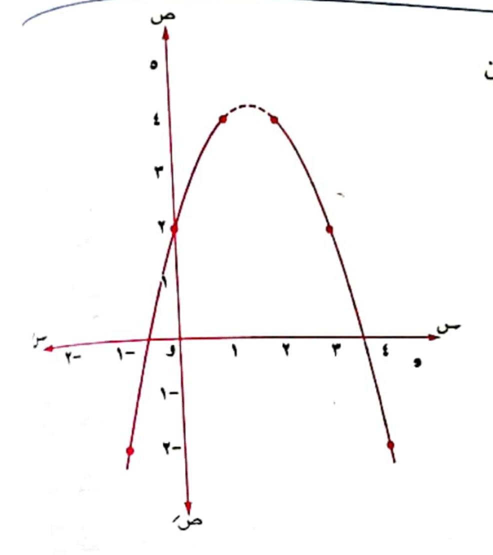
١ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة. ٢ معادلة محور التماثل.

الحـــل

∵ د (س) = − س^{٢} + ٣ س + ٢

س	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	−٢	٢	٤	٤	٢	−٢

وعند تمثيل الأزواج المرتبة نلاحظ أن نقطة رأس المنحنى ليست ضمن هذه النقط مما يجعل رسم الجزء المنقط بالشكل المقابل غير دقيق ، وبالتالى يصعب دراسة المنحنى ، ولذا يجب إيجاد نقطة رأس المنحنى جبريًا كما يلى :



إيجاد نقطة رأس المنحنى

عند رأس منحنى الدالة التربيعية يكون :

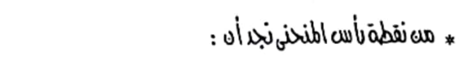
- الإحداثى السينى = $\frac{-ب}{٢ أ}$
- الإحداثى الصادى = د $\left(\frac{-ب}{٢ أ}\right)$

حيث ب معامل س ، أ معامل س^{٢}

∴ س عند رأس المنحنى = $\frac{-٣}{٢ \times (-١)} = \frac{-٣}{-٢} = ١\frac{١}{٢}$

، ∵ د $\left(١\frac{١}{٢}\right) = \frac{-٩}{٤} + \frac{٩}{٢} + ٢ = ٤\frac{١}{٤}$

∴ رأس المنحنى عند النقطة $\left(١\frac{١}{٢} ، ٤\frac{١}{٤}\right)$



* من نقطة رأس المنحنى نجد أن :

١ القيمة العظمى للدالة = $٤\frac{١}{٤}$

٢ معادلة محور التماثل هى : س = $١\frac{١}{٢}$



ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣ على الفترة [−٤ ، ٢]

ومن الرسم أوجد :

١ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.　　٢ معادلة محور التماثل.

مثال ٥

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ و مربع

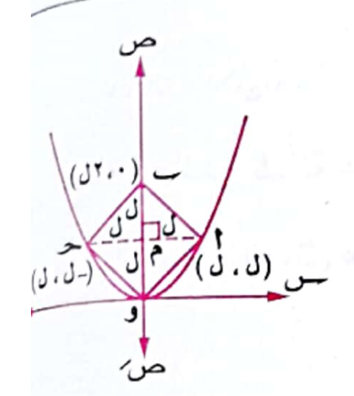
، المنحنى يمثل الدالة د : د (س) = س^{٢}

أوجد إحداثيات النقط : أ ، ب ، حـ

الحـــل

نرسم قطر المربع $\overline{أحـ}$ ليتقاطع مع القطر $\overline{ب و}$ فى نقطة م

∵ قطرا المربع متساويان فى الطول وينصف كل منهما الآخر



∴ م أ = م ب = م حـ = م و

ويفرض أن : م أ = ل

∴ م أ = م ب = م حـ = م و = ل

∴ أ (ل ، ل) ، حـ (−ل ، ل) ، ب (٠ ، ٢ ل)

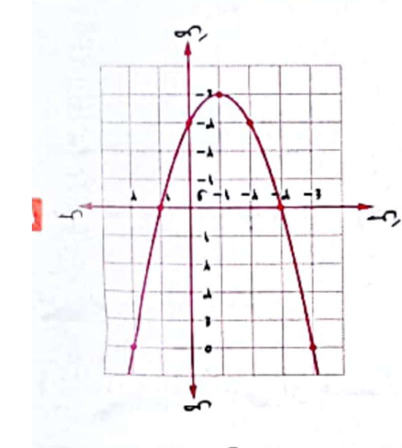
، ∵ أ (ل ، ل) ينتمى لبيان الدالة د : د (س) = $س^٢$

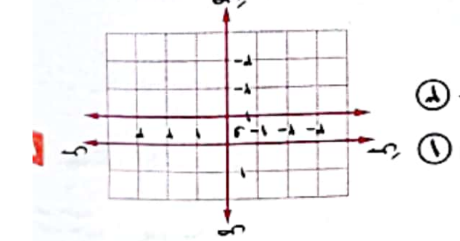
، وبالتعويض فى قاعدة الدالة :

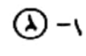
∴ ل = $ل^٢$ ∴ $ل^٢$ − ل = ٠

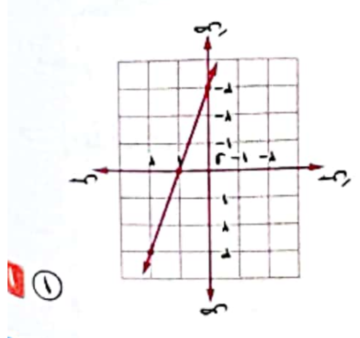
∴ ل (ل − ١) = ٠ ∴ ل = ٠ (مرفوض)

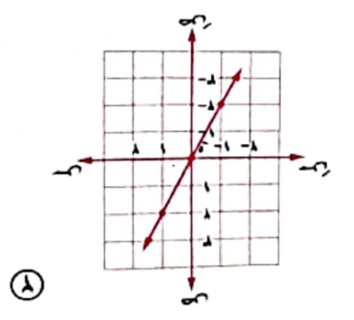
أ، ل − ١ = ٠ ومنها ل = ١ ∴ أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، ٢) ، حـ (−١ ،

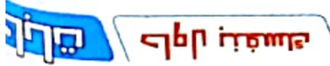















تمارين 4

على بعض دوال كثيرات الحدود





أسئلة كتاب الوزارة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : د (س) = ٧ فإن : د (−٣) = ... (الجيزة ١٧)

(أ) ٧ (ب) −٧ (جـ) ٢١ (د) −٢١

٢ إذا كانت : د (س) = ٢ فإن : ٣ د ($\sqrt{٢}$) = ...

(أ) د ($٣\sqrt{٢}$) (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٢

٣ إذا كانت : د (س) = ٢ فإن : د (٣) − د (١) = ... (الدقهلية ١٣)

(أ) د (٢) (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١٠

٤ إذا كانت : د (س) = ٥ فإن : $\frac{\text{د (٥)}}{\text{د (١٠)}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ١٠

٥ إذا كانت د دالة حيث د : ح ⟵ ح وكانت د (س) = ٣

فإن : $\frac{\text{د (٦)}}{\text{د (صفر)}}$ = ... (الدقهلية ١٧)

(أ) ٦ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) غير معرفة.

٦ إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : $\frac{\text{٢ د (٣)}}{\text{٣ د (٢)}}$ = ... (الإسكندرية ٠٥)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٣٢}{٢٣}$

٧ إذا كانت : د (٢ س) = ٤ فإن : د (− س) = ... (الدقهلية ٠٩)

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٢

٨ الدالة د : د (س) = ٣ س يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة .... (بني سويف ١٧)

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (٣ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٠ ، ٣)

١٦ إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ ، س ∈ [-٢ ، ٢]

فإن : د (س) ∈ .... (الدقهلية ٠٨)

(أ) [٠ ، ٤[(ب)]٠ ، ٤] (جـ) [٠ ، ٤] (د)]-٤ ، ٤[

٢ أكمل ما يأتى :

١ الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٥ يمثلها خط مستقيم يوازى ....
ويقطع محور الصادات فى النقطة ....

٢ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د (س) = ٢ س − ١ يمثلها بيانيًا خط مستقيم
يقطع محور الصادات فى النقطة ....

٣ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة د (س) = ٣ س + ٦ يمثلها بيانيًا خط مستقيم
يقطع محور السينات فى النقطة ....

٤ إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح
حيث د (س) = ٤ س − ٥ فإن : أ = ... (البحيرة ١١)

٥ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٥ س − أ يقطع محور
الصادات فى النقطة (ب ، ٢) فإن : أ = ... ، ب = ...

٦ معادلة خط التماثل لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ هى .... (سوهاج ٠٩)

٧ إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ + حـ يمر بالنقطة (٠ ، ٢)
فإن : حـ = ... (دمياط ١١)

٨ إذا كانت : (-٢ ، ص) تنتمى لمنحنى الدالة د : د (س) = $س^{٢}$ + ١
فإن : ص = ... (ع.سيناء ٠٩)

٣ مثل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية حيث س ∈ ح :

١ د : د (س) = ٥

٢ د : د (س) = -٤

٣ د : د (س) = صفر

٤ د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$

٤ مثل بيانيًا كلًا من الدوال الخطية الآتية ، وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم الممثل لكل منها مع محورى الإحداثيات حيث س ∈ ح :

١ د : د (س) = س

٢ د : د (س) = − س

٣ د : د (س) = ٣ س

٤ د : د (س) = − ٢ س

٥ د : د (س) = س + ٢

٦ د : د (س) = ٢ − س

٧ د : د (س) = ٣ س − ١

٨ د : د (س) = − ٢ س + ٣

٩ د : د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

١٠ د : د (س) = ٥ − $\frac{١}{٢}$ س

٥ مثل بيانيًا كلًا من الدوال الآتية ، ومن الرسم استنتج إحداثيى رأس المنحنى ، ومعادلة محور التماثل ، والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة حيث س ∈ ح :

١ د : د (س) = ٢ س^{٢} متخذًا س ∈ [−٢ ، ٢]

٢ د : د (س) = س^{٢} + ١ متخذًا س ∈ [−٣ ، ٣] (الفيوم ١٦ ، بنى سويف ١٤)

٣ د : د (س) = س^{٢} − ٢ متخذًا س ∈ [−٣ ، ٣] (دمياط ٢٠ ، بورسعيد ١٨ ، البحيرة ١٧)

٤ د : د (س) = ٢ − س^{٢} متخذًا س ∈ [−٣ ، ٣] (سوهاج ٢٠ ، الغربية ١٩ ، الإسكندرية ١٨)

٥ د : د (س) = س^{٢} − ٢ س متخذًا س ∈ [−٢ ، ٤] (كفر الشيخ ٢٠ ، القاهرة ١٨ ، قنا ١١)

٦ د : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ١ متخذًا س ∈ [−٤ ، ٢] (الغربية ١٨ ، الشرقية ١٧)

٧ د : د (س) = (س − ٢)^{٢} متخذًا س ∈ [−١ ، ٥] (الغربية ٢٠ ، كفر الشيخ ١٩)

٨ د : د (س) = س (س − ٢) − ٣ متخذًا س ∈ [−٢ ، ٤] (الدقهلية ١٧)

٩ د : د (س) = ٣ − ٢ س − س^{٢} متخذًا س ∈ [−٤ ، ٢]

١٠ د : د (س) = ٤ س + ٣ − ٢ س^{٢} متخذًا س ∈ [−٢ ، ٣]

١١ د : د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٥ متخذًا س ∈ [٠ ، ٥]

١٢ د : د (س) = ١ − ٣ س + س^{٢} متخذًا س ∈ [−١ ، ٤]

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س − ٦ يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٢ أ)

أوجد قيمة : أ ثم أوجد نقطة تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات.

(الغربية ٢٠) «٦ ، (٠ ، −٦)»

---

٧ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ س + ب يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات طوله يساوى ٣ وحدات ويمر بالنقطة (١ ، ٥)

أوجد قيمتى : أ ، ب

(كفر الشيخ ٢٠) «٢ ، ٣»

---

٨ إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = أ س + ب يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، ٠) ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −٣)

أوجد قيمة كل من الثابتين : أ ، ب ثم أوجد قيمة : د (١)

(الشرقية ١٧) «١ ، −٣ ، −٢»

---

٩ إذا كان منحنى الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = م − س^{٢} يقطع محور السينات فى النقطة (−٢ ، ب) **أوجد قيمة : م^{ب} + ٢ م**

(الشرقية ١٥) «٩»

---

١٠ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٦} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

وكانت ر : س ⟵ ص حيث ر (س) = ٩ − س

١ أوجد مجموعة صور عناصر المجموعة س بالدالة ر

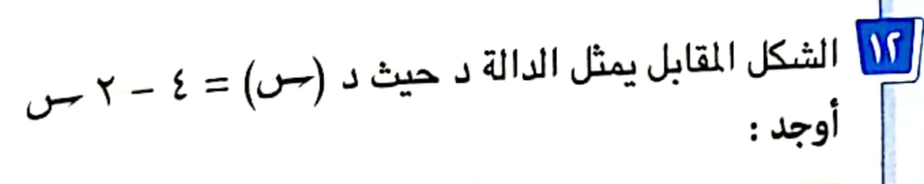
٢ هل ر دالة خطية ؟ اذكر السبب.

(الدقهلية ١٤)

---

١١ إذا كانت : د (س) = أ + س^{٢} ، ل (س) = حـ حيث د ، ل كثيرتا حدود ، أ ، حـ ثابتان وكان : ٣ د (٢) + ٣ ل (س) = ٦ **أوجد القيمة العددية للمقدار : ٢ د (٠) + ٢ ل (٧)**

(الدقهلية ١٩) «−٤»

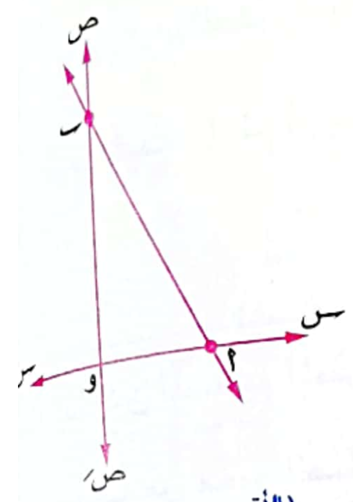


١٢ الشكل المقابل يمثل الدالة د حيث د (س) = ٤ − ٢ س

أوجد :

١ إحداثيي كل من النقطتين ء ، ب

٢ مساحة سطح Δ ء و ب



(الأقصر ١٩ ، الإسماعيلية ١٦)

١٣ فى الشكل المقابل :

الدالة الثابتة د تمثل بيانيًا بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

والدالة الخطية ر تمثل بيانيًا بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ حيث : ء (٢ ، ٣)

١ اكتب قاعدة الدالة د وقاعدة الدالة ر

٢ أوجد قيمة : د (−١٠) + ر (٦)

(الشرقية ١٤) «١٢»

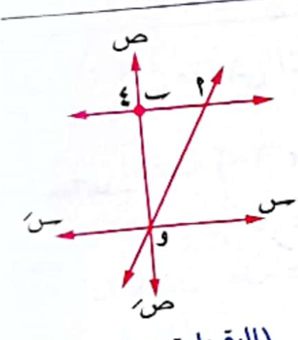
١٤ الشكل المقابل يوضح المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ء ب}}$ الذى يمثل الدالة د

حيث : د (س) = ٤ ، فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ يمثل الدالة الخطية ر

حيث : ر (س) = م س + ك ، وكانت مساحة سطح

المثلث ء ب و تساوى ٤ وحدات مربعة ،

فأوجد قيمة : كل من م ، ك حيث و نقطة الأصل.

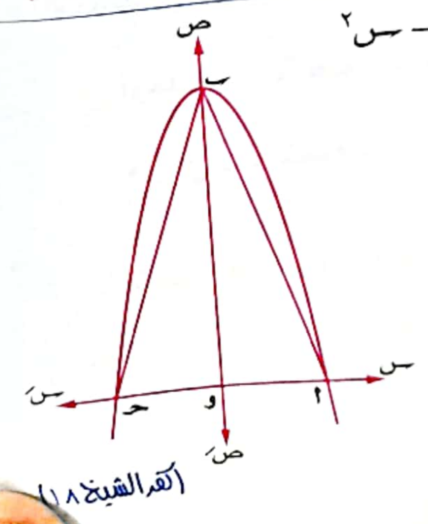


(الدقهلية ١٧) «٢ ، ٠»

١٥ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث د (س) = ٩ − س٢

أوجد : ١ إحداثيى ء ، حـ

٢ مساحة المثلث ء ب حـ



(كفر الشيخ ١٨)

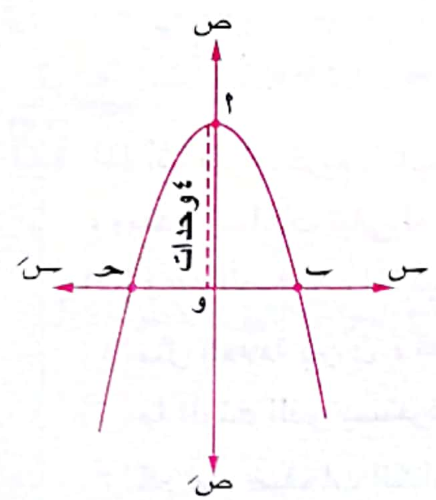
١٦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث :

د (س) = م − س^٢ ، إذا كان أ و = ٤ وحدات

أوجد : ١ قيمة م

٢ إحداثيي كل من ب ، حـ

٣ مساحة المثلث الذى رؤوسه أ ، ب ، حـ

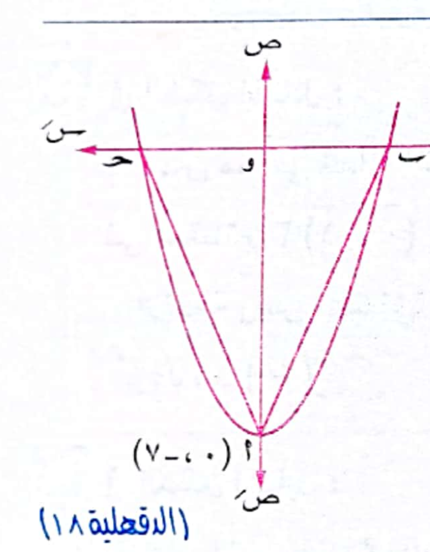


(الجيزة ٢٠ ، الأقصر ١٨ ، ش. سيناء ١٦)

١٧ الشكل المقابل يمثل الدالة د : د (س) = ل س^٢ − ٧

، مساحة المثلث أ ب حـ = ٢١ وحدة مربعة

، أ (٠ ، −٧) أوجد إحداثيي نقطة ب ثم أوجد قيمة ل



(الدقهلية ١٨)

١٨ الشكل المقابل يوضح المخطط البيانى لدالة الدرجة الثانية د :

١ اكتب مجال الدالة د

ثم استنتج من الشكل :

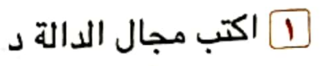
٢ مدى الدالة د

٣ معادلة محور تماثل منحنى الدالة د

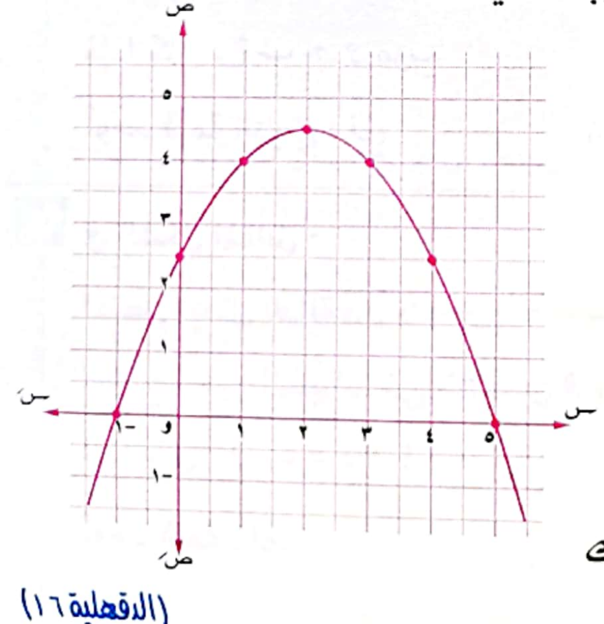
٤ القيمة العظمى للدالة د

٥ قيمة د (١)

٦ إذا كانت : د (س) = أ (س − ٢)^٢ + ك



فأوجد قيمة : أ + ك



(الدقهلية ١٦)

الـدالـة

✪ يقال لعلاقة من س إلى ص إنها دالة إذا تحققت إحدى الحالات الآتية :

(١) كل عنصـر مـن عناصـر س يظهـر مرة واحـدة فقط كمسـقط أول فى أحـد الأزواج المرتبة التى تنتمى إلى بيان العلاقة.

(٢) كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص وذلك فى المخطط السهمى الممثل للعلاقة.

(٣) كل خط رأسى تقع عليه نقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة وذلك فى المخطط البيانى الممثل للعلاقة.

✪ إذا كانت د دالة من س إلى ص فإنها تكتب د : س ⟵ ص ويكون :

(١) س هى مجال الدالة د

(٢) ص هى المجال المقابل للدالة د

(٣) مجموعة صور عناصر س بالدالة د هى مدى الدالة ويكون مدى الدالة ⊂ المجال المقابل للدالة.

دوال كثيرات الحدود

✪ الدالة كثيرة الحدود هى دالة قاعدتها حد أو مقدار جبرى ويتوافر فيها الشرطان الآتيان معًا :

(١) كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

(٢) قوة (أس) المتغير فى أى حد من حدود قاعدتها هو عدد طبيعى.

لاحظ أن : درجة الدالة كثيرة الحدود هى أكبر قوة للمتغير فى قاعدة الدالة.

✪ الدالة الثابتة :

الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ب ، ب ∈ ح تسمى دالة ثابتة ويمثلها بيانيًا خط مستقيم يوازى محور السينات ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

✪ الدالة الخطية :

الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ س + ب ، أ ∈ ح - {٠} ، ب ∈ ح تسمى دالة خطية (دالة من الدرجة الأولى) يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور الصادات فى (٠ ، ب) ويقطع محور السينات فى $\left(\frac{-ب}{أ} ، ٠\right)$

✪ الدالة التربيعية :

الدالة د : ح ⟵ ح حيث د (س) = أ $س^2$ + ب س + حـ ، أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ≠ ٠ تسمى دالة تربيعية وهى دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية ويمثلها بيانيًا منحنى نقطة رأسه هى : $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

٣ (أ) إذا كان بيان الدالة د = {(٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١)}

١ اكتب مجال الدالة د **٢** اكتب مدى الدالة د **٣** اكتب قاعدة للدالة د

(ب) مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = −٢ س + ٣ وأوجد نقطتى تقاطع المستقيم الممثل للدالة د مع محورى الإحداثيات حيث س ∈ ع

٤ (أ) إذا كانت : س = {−١ ، ١ ، ٠ ، ٢} ، ع علاقة معرفة على س حيث «أ ع ب» تعنى أن «ب = أ^{٢}» لكل (أ ، ب) ∈ س^{٢}

١ اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.

٢ هل العلاقة ع دالة ؟ ولماذا ؟

(ب) مثل بيانيًا الدالة د حيث د (س) = (س − ٢)^{٢} + ١ متخذًا س ∈ [٠ ، ٤]

ومن الرسم استنتج :

١ إحداثيى رأس المنحنى. **٢** معادلة محور التماثل.

٣ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

٥ (أ) إذا كانت : د ، ر دالتين حيث : د (س) = −٢ س + ٣ ، ر (س) = −٧

١ أوجد : درجة الدالة د **٢** احسب قيمة : د (٠) + ر (٠)

(ب) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة التربيعية

د : د (س) = ٤ − ك س^{٢} ، ك ثابت ≠ ٠ .

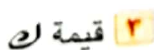
، أ (٠ ، ٤) هى رأس المنحنى

، «و» هى نقطة الأصل

، ب ، حـ ∈ محور السينات

، مساحة المثلث الذى رؤوسه أ ، ب ، حـ تساوى ٨ وحدات مربعة.

أوجد : **١** معادلة محور التماثل ، القيمة العظمى للدالة د

٢ إحداثيى نقطة ب  **٣** قيمة ك

٣ (أ) مثل بيانيًا الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٤ متخذًا س ∈ [−٤ ، ٢]

ومن الرسم استنتج :

١ إحداثيي رأس المنحنى. **٢** معادلة محور التماثل.

٣ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

(ب) إذا كان المستقيم الممثل للدالة د حيث د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٢ س − ٣ ك

يقطع محور السينات فى النقطة (٦ ، م − ٢) **فأوجد قيمة كل من : م ، ك**

٤ (أ) إذا كان : (س − ٢ ، ٩) = (٥ ، س + ص) **أوجد قيمة :** $\sqrt[3]{\text{س} + ٢\ \text{ص}}$

(ب) إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٥} ، ع = {٤ ، ٥}

فأوجد : ١ (س − ص) × ع **٢** ن (س × ص) + ن (ع^{٢})

٥ (أ) إذا كانت : س = {٤ ، ٥ ، ٧} وكانت ع دالة على س وكان بيان

ع = {(أ ، ٥) ، (ب ، ٥) ، (٤ ، ٧)}

أوجد : ١ القيمة العددية للمقدار : ٣ أ + ٣ ب **٢** مدى الدالة ع

(ب) إذا كانت د : د (س) = ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢ **أوجد قيمة :** د (٢) − د $\left(\frac{١}{٢}\right)$



مشروع بحثى

على الوحدة الأولى

أهداف المشروع

- تمثيل الدالة التربيعية بيانيًا.
- الربط بين الرياضيات وتكنولوچيا الحاسب.

المطلوب

« أصبح الكمبيوتر الآن أحد الأدوات الهامة فى دراسة العلوم المختلفة ومنها الرياضيات »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- اكتب نبذة مختصرة عن لغة البرمجة فيجوال بيزك (Visual Basic).
- باستخدام أحد برامج الكمبيوتر التى تستخدم فى مجال الرياضيات مثل Geogebra والذى يمكنك الوصول إليه من الموقع الإلكترونى www.geogebra.org :

(١) مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = $س^٢$

(٢) مثل بيانيًا على نفس الشكل الدالة ر : ر (س) = $(س - ١)^٢$

(٣) ثم مثل بيانيًا على نفس الشكل الدالة ن : ن (س) = $(س + ١)^٢$

(٤) قارن منحنى الدالة ر مع منحنى الدالة د ، وقارن منحنى الدالة ن مع منحنى الدالة د ثم اكتب ماذا تلاحظ ؟

(٥) توقع كيف سيكون شكل منحنى الدالة ك : ك (س) = $(س - ٣)^٢$ وكيف سيكون شكل منحنى الدالة ق : ق (س) = $(س + ٤)^٢$

الوحدة 2

النسبة والتناسب والتغير الطردى والتغير العكسى



دروس الوحدة :

- الدرس 1 النسبة والتناسب.
- الدرس 2 تابع خواص التناسب.
- الدرس 3 التناسب المتسلسل.
- الدرس 4 التغير الطردى والتغير العكسى.

مشروع بحثى على الوحدة الثانية



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف مفهوم النسبة.
- يتعرف خواص النسبة.
- يتعرف مفهوم التناسب.
- يتعرف خواص التناسب.
- يتعرف مفهوم التناسب المتسلسل.
- يستخدم خواص النسبة والتناسب فى حل العديد من المشكلات.
- يتعرف مفهوم التغير الطردى.
- يتعرف مفهوم التغير العكسى.
- يميز بين التغير الطردى والتغير العكسى.
- يحل مسائل حياتية على التغير الطردى والتغير العكسى.
- يقدِّر دور الرياضيات فى حل الكثير من المشكلات الحياتية.

الدرس ١

النسبة والتناسب

أولًا النسبة

درسنا فى المرحلة الابتدائية أن النسبة هى إحدى طرق المقارنة بين كميتين.

فمثلًا :



إذا قُسمت فطيرة إلى ٤ أجزاء متساوية

وأكل هانى جزءًا واحدًا منها فقط فإن :

- نسبة ما أكله هانى إلى الفطيرة بالكامل هى ١ : ٤ وقد تُكتب $\frac{١}{٤}$
- نسبة ما تبقى إلى الفطيرة بالكامل هى ٣ : ٤ وقد تُكتب $\frac{٣}{٤}$
- نسبة ما أكله هانى إلى ما تبقى من الفطيرة هى ١ : ٣ وقد تُكتب $\frac{١}{٣}$

وعمومًا فإنه :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن النسبة بين أ و ب تُكتب أ : ب أو $\frac{أ}{ب}$

وتُقرأ أ إلى ب حيث :

يُسمى أ مقدم النسبة ، يُسمى ب تالى النسبة ، يُسمى أ ، ب معًا حدى النسبة.

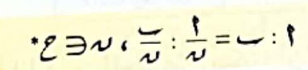
خواص النسبة

١ قيمة النسبة **لا تتغير** إذا ضُرب حداها فى أو قُسما على عدد حقيقى لا يساوى الصفر.

أى أن :

أ : ب = أ ك : ب ك ، ك ∈ ح*

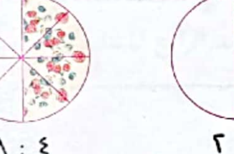
أ : ب = $\frac{أ}{ن}$: $\frac{ب}{ن}$ ، ن ∈ ح*



فمثلًا : ١ : ٢ = ١ × ④ : ٢ × ④

أى أن : ١ : ٢ = ٤ : ٨

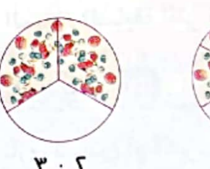




١ : ٢   ٤ : ٨

فمثلًا : ٤ : ٦ = $\frac{٤}{②}$: $\frac{٦}{②}$

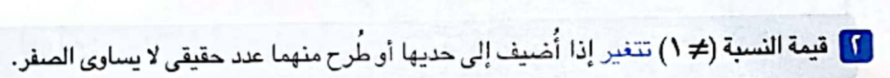
أى أن : ٤ : ٦ = ٢ : ٣



٤ : ٦   ٢ : ٣

٢ قيمة النسبة (≠ ١) **تتغير** إذا أُضيف إلى حديها أو طُرح منهما عدد حقيقى لا يساوى الصفر.

أى أن :



أ : ب ≠ أ + ك : ب + ك ، ك ∈ ح* حيث أ ≠ ب

أ : ب ≠ أ − ك : ب − ك ، ك ∈ ح* حيث أ ≠ ب

فمثلًا : ٣ : ٤ ≠ ٣ + ① : ٤ + ①

أى أن : ٣ : ٤ ≠ ٤ : ٥

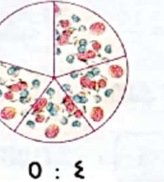


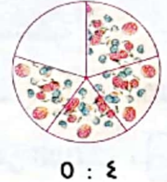


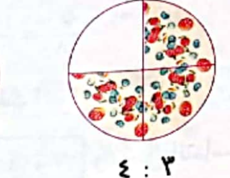
٣ : ٤   ٤ : ٥

فمثلًا : ٥ : ٨ ≠ ٥ − ③ : ٨ − ③

أى أن : ٥ : ٨ ≠ ٢ : ٥







٥ : ٨   ٢ : ٥

ثانيًا التناسب

الجدول التالى يوضح مجموعتين من الأعداد :

المجموعة أ	٢	٤	٧	٣	٦
المجموعة ب	٨	١٦	٢٨	١٢	٢٤

وإذا تأملنا هاتين المجموعتين يمكننا أن نلاحظ أن :

$\frac{٢}{٨} = \frac{٤}{١٦} = \frac{٧}{٢٨} = \frac{٣}{١٢} = \frac{٦}{٢٤}$ وكل منها يساوى $\frac{١}{٤}$

فى هذه الحالة نقول إن أعداد المجموعة أ تتناسب مع الأعداد المناظرة لها فى المجموعة ب

وتسمى الصورة السابقة التى تعبر عن تساوى نسبتين أو أكثر بـ «التناسب».

تعريف التناسب

هو تساوى نسبتين أو أكثر.

أى أنه :

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فإن الكميات : أ ، ب ، حـ ، ء تكون متناسبة.

والعكس : إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$

ويُسمى : أ بالأول المتناسب ، ب بالثانى المتناسب ، حـ بالثالث المتناسب ، ء بالرابع المتناسب.

كما يسمى : أ ، ء بطرفى التناسب ، ب ، حـ بوسطى التناسب.

فمثلًا : الأعداد ١ ، ٤ ، ٧ ، ٢٨ أعداد متناسبة لأن : $\frac{١}{٤} = \frac{٧}{٢٨}$

ويكون : ١ الأول المتناسب ، ٤ الثانى المتناسب ، ٧ الثالث المتناسب ، ٢٨ الرابع المتناسب ، ١ ، ٢٨ طرفى التناسب ، ٤ ، ٧ وسطى التناسب

خواص التناسب

خاصية ١

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ فإن : أ × ء = ب × حـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

السبب : إذا ضربنا كل نسبة فى ب ء فإننا نجد أن : $\frac{أ}{ب} \times ب ء = \frac{حـ}{ء} \times ب ء$

أى أن : أ × ء = ب × حـ

مثال ١

١ أوجد الثالث المتناسب للكميات : ٣ ، ٤ ، ... ، ٢٠

٢ أوجد الرابع المتناسب للكميات : ١٨ $أ^٢$ ب ، ١٢ أ $ب^٢$ ، ٢١ أ ب ، ...

الحل

١ نفرض أن الثالث المتناسب هو س ∴ الكميات : ٣ ، ٤ ، س ، ٢٠ متناسبة

∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{س}{٢٠}$ ومن الخاصية السابقة : ∴ ٣ × ٢٠ = ٤ × س

∴ ٤ س = ٦٠ ∴ س (الثالث المتناسب) = ١٥

٢ نفرض أن س هو الرابع المتناسب

∴ الكميات : ١٨ $أ^٢$ ب ، ١٢ أ $ب^٢$ ، ٢١ أ ب ، س متناسبة

∴ $\frac{١٨ أ^٢ ب}{١٢ أ ب^٢} = \frac{٢١ أ ب}{س}$ ∴ $\frac{٣ أ}{٢ ب} = \frac{٢١ أ ب}{س}$

∴ ٣ أ × س = ٢١ أ ب × ٢ ب

∴ ٣ أ س = ٤٢ أ $ب^٢$ ∴ س = $\frac{٤٢ أ ب^٢}{٣ أ}$

∴ س (الرابع المتناسب) = ١٤ $ب^٢$

حاول بنفسك ١

إذا كانت الكميات : س ، ٢٣ ، ١٥ ، ٦٩ كميات متناسبة فأوجد : قيمة س

مثال ٢

أوجد العدد الذى إذا أضيف لكل من الأعداد ١ ، ١٣ ، ٧ ، ٣١ حصلنا على أعداد متناسبة.

الحل

نفرض أن العدد = س

∴ ١ + س ، ١٣ + س ، ٧ + س ، ٣١ + س متناسبة

∴ $\frac{١ + س}{١٣ + س} = \frac{٧ + س}{٣١ + س}$ ∴ (س + ١) (س + ٣١) = (س + ٧) (س + ١٣)

∴ $س^2$ + ٣٢ س + ٣١ = $س^2$ + ٢٠ س + ٩١ ∴ ٣٢ س − ٢٠ س = ٩١ − ٣١

∴ ١٢ س = ٦٠ ∴ س = ٥ ∴ العدد المطلوب = ٥

مثال ٣

إذا كان: (٢ س + ٥) : (٣ س − ٣) = ٥ : ٤ فأوجد قيمة: س

الحل

∵ $\frac{٢ س + ٥}{٣ س - ٣} = \frac{٥}{٤}$ ∴ ٤ (٢ س + ٥) = ٥ (٣ س − ٣)

∴ ٨ س + ٢٠ = ١٥ س − ١٥ ∴ ٢٠ + ١٥ = ١٥ س − ٨ س

∴ ٣٥ = ٧ س ∴ س = $\frac{٣٥}{٧}$ = ٥

مثال ٤

أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ١٧ : ٢٢ فإننا نحصل على النسبة ٦ : ٧

الحل

نفرض أن العدد المطلوب = س ∴ $\frac{١٧ + س}{٢٢ + س} = \frac{٦}{٧}$

∴ ٧ (١٧ + س) = ٦ (٢٢ + س) ∴ ١١٩ + ٧ س = ١٣٢ + ٦ س

∴ ٧ س − ٦ س = ١٣٢ − ١١٩ ∴ س (العدد المطلوب) = ١٣

حاول بنفسك ٢

أوجد العدد الحقيقى الذى إذا طُرح من حدى النسبة $\frac{٥}{٦}$ لأصبحت $\frac{٣}{٢}$

خاصية ٢

إذا كان: أ × د = ب × ج فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

السبب: إذا قسمنا كل نسبة على ب د فإننا نجد أن: $\frac{أ × د}{ب د} = \frac{ب × ج}{ب د}$

أى أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

ويمكن أيضًا أن نستنتج أنه:

- إذا كان: أ × د = ب × ج فإن: $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$
- إذا كان: أ × د = ب × ج فإن: $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{ج}$
- إذا كان: أ × د = ب × ج فإن: $\frac{ج}{أ} = \frac{د}{ب}$

مثال ٥

فى كل مما يأتى أوجد $\frac{س}{ص}$ إذا كان:

١ ١٢ × س = ٣ × ص

٢ $\frac{١}{٢}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ص

الحل

١ ∵ ١٢ × س = ٣ × ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$

٢ ∵ $\frac{١}{٢}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤} ÷ \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤} × \frac{٢}{١} = \frac{٣}{٢}$

مثال ٦

إذا كان : ٤ س − ٣ ص : ٢ س + ص = ٤ : ٧ **فأوجد فى أبسط صورة : النسبة س : ص**

الحل

∵ $\frac{\text{٤ س − ٣ ص}}{\text{٢ س + ص}} = \frac{٤}{٧}$ ∴ ٧ (٤ س − ٣ ص) = ٤ (٢ س + ص)

∴ ٢٨ س − ٢١ ص = ٨ س + ٤ ص

∴ ٢٨ س − ٨ س = ٢١ ص + ٤ ص ∴ ٢٠ س = ٢٥ ص

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢٥}{٢٠}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٥}{٤}$

مثال ٧

إذا كان : ٢ $\text{س}^{٢}$ − ٦ $\text{ص}^{٢}$ = س ص **فأوجد : س : ص**

الحل

∵ ٢ $\text{س}^{٢}$ − ٦ $\text{ص}^{٢}$ = س ص ∴ ٢ $\text{س}^{٢}$ − س ص − ٦ $\text{ص}^{٢}$ = ٠

∴ (٢ س + ٣ ص) (س − ٢ ص) = ٠

∴ ٢ س + ٣ ص = ٠ ومنها ٢ س = −٣ ص ∴ $\boxed{\frac{\text{س}}{\text{ص}} = -\frac{٣}{٢}}$

أ، س − ٢ ص = ٠ ومنها س = ٢ ص ∴ $\boxed{\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{١}}$

أى أن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = -\frac{٣}{٢}$ أ، $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{١}$

حاول بنفسك ٢

(١) إذا كان : ٢ أ − ٥ ب = ٠ . **فأوجد :** $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

(٢) إذا كان : $\frac{\text{س + ٢ ص}}{\text{٤ س − ٢ ص}} = \frac{٧}{٦}$ **فاثبت أن :** $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٢}$

(٣) إذا كان : ٤ $\text{أ}^{٢}$ − ٩ $\text{ب}^{٢}$ = ٠ . **فأوجد أ : ب**

خاصية ٣

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$ أى أن : $\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالى النسبة الأولى}}{\text{تالى النسبة الثانية}}$

السبب : إذا ضربنا كل نسبة فى $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ فإننا نجد أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \times \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$

أى أن : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

فمثلا : إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٤} = \frac{\text{ب}}{٣}$ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٤}{٣}$ و $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٤}$

مثال ٨

فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه :

د ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

، د هـ = ٣ سم ، هـ جـ = ٤ سم

أوجد : أ ب : ب جـ

الحل

فى ΔΔ أ ب جـ ، د هـ جـ :

ق (∠ب) = ق (∠د هـ جـ) = ٩٠° ، ∠جـ مشتركة فى المثلثين

∴ ق (∠أ) = ق (∠هـ د جـ)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ جـ

وينتج أن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{٣} = \frac{\text{ب جـ}}{٤}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٣}{٤}$ (وهو المطلوب)

خاصية ٤

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن : أ = جـ م ، ب = د م (حيث م ثابت ≠ صفر)

فمثلاً : إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$ فإن : أ = ٣ م ، ب = ٤ م (حيث م ثابت ≠ صفر)

مثال ٩

إذا كان أ : ب = ٣ : ٥ فأوجد النسبة : ٢٠ أ − ٧ ب : ١٥ أ + ب

الحل

∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ ∴ أ = ٣ م ، ب = ٥ م (حيث م ≠ صفر)

وبالتعويض عن أ ، ب بدلالة م ∴ $\frac{٢٠ أ - ٧ ب}{١٥ أ + ب} = \frac{٦٠ م - ٣٥ م}{٤٥ م + ٥ م} = \frac{٢٥ م}{٥٠ م} = \frac{١}{٢}$

حل آخر : بقسمة حدى النسبة $\frac{٢٠ أ - ٧ ب}{١٥ أ + ب}$ على ب ثم التعويض عن قيمة $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{٢٠ أ - ٧ ب}{١٥ أ + ب} = \frac{٢٠ (\frac{أ}{ب}) - ٧}{١٥ (\frac{أ}{ب}) + ١} = \frac{٢٠ \times \frac{٣}{٥} - ٧}{١٥ \times \frac{٣}{٥} + ١} = \frac{١٢ - ٧}{٩ + ١} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

مثال ١٠

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$

فأثبت أن : (٧ أ س + ٤ ب ص) ، (١١ أ ص + ب س) ، ١٢ ، ١٤ كميات متناسبة.

الحل

∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ∴ أ = ٢ م ، ب = ٣ م (حيث م ≠ صفر)

، ∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ∴ س = ٣ ك ، ص = ٥ ك (حيث ك ≠ صفر)

[لاحظ أننا استخدمنا ثابتين مختلفين م ، ك ولا يجوز استخدام نفس الثابت]

وبالتعويض عن أ ، ب ، س ، ص

∴ $\frac{٧ أ س + ٤ ب ص}{١١ أ ص + ب س} = \frac{٧ \times ٢ م \times ٣ ك + ٤ \times ٣ م \times ٥ ك}{١١ \times ٢ م \times ٥ ك + ٣ م \times ٣ ك}$

$= \frac{٤٢ م ك + ٦٠ م ك}{١١٠ م ك + ٩ م ك} = \frac{١٠٢ م ك}{١١٩ م ك} = \frac{٦}{٧}$

، ∵ $\frac{١٢}{١٤} = \frac{٦}{٧}$

∴ (٧ أ س + ٤ ب ص) ، (١١ أ ص + ب س) ، ١٢ ، ١٤ كميات متناسبة.

حاول بنفسك ٤

إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ فأثبت أن : (٢ س + ص) ، (س + ٢ ص) ، ١٢ ، ١٦ كميات متناسبة.

مثال ١١

عددان حقيقيان النسبة بينهما ٤ : ٧ وإذا طرح من كل منهما ١٦ أصبحت النسبة بين العددين الناتجين ٢ : ٥ أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما أ ، ب ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{٤}{٧}$

∴ أ = ٤ م ، ب = ٧ م (حيث م ≠ صفر) ∴ $\frac{٤ م - ١٦}{٧ م - ١٦} = \frac{٢}{٥}$

∴ ١٤ م − ٣٢ = ٢٠ م − ٨٠ ∴ −٣٢ + ٨٠ = ٢٠ م − ١٤ م

∴ ٤٨ = ٦ م ∴ م = $\frac{٤٨}{٦}$ = ٨

∴ أ = ٤ × ٨ = ٣٢ ، ب = ٧ × ٨ = ٥٦ أى أن : العددين هما : ٣٢ ، ٥٦

حاول بنفسك ٥

عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٥ وإذا طرح من العدد الأول ٢ وأضيف للثانى ١ صارت النسبة بينهما ١ : ٤ أوجد العددين.

تمارين 5

على النسبة والتناسب



اختبر تفاعلي

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة فإن : حـ يسمى .... (دمياط ٠٨)

٢ إذا كانت الكميات : أ ، ب ، حـ ، ء متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ... (البحيرة ١١)

٣ الرابع المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، ... هو .... (كفر الشيخ ١١)

٤ الثانى المتناسب للأعداد : ٢ ، ... ، ٤ ، ٦ هو ....

٥ الثالث المتناسب للأعداد : ٨ ، ٦ ، ... ، ١٢ هو ....

٦ الأول المتناسب للأعداد : ... ، ٥ ، ٢٧ ، ٤٥ هو ....

٧ إذا كانت : ٣ ، أ − ١ ، أ + ١ ، ٥ متناسبة فإن : أ = ...

٨ قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢ : ٣ فإذا كان نصيب أولهما ٣٠ جنيهًا فإن نصيب الآخر = ... جنيهًا. (ج. سيناء ٠٩)

٩ إذا كان : ٧ س = ٣ ص فإن : $\frac{س}{ص}$ = ... (الوادى الجديد ١١)

١٠ إذا كان : ٥ أ − ٤ ب = ٠ فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ... (سوهاج ٠٩)

١١ إذا كان : $\frac{٥ أ - ٧ ب}{٨ أ + ١١ ب}$ = ٠ فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ... (الفيوم ١٢)

١٢ إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن : $\frac{٢ أ}{٣ ب}$ = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم إلى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها ٢ ل سم كنسبة .... (المنوفية ١٣)

(أ) ١ : ٢ (ب) ل : ٤ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٢ إذا كان : $\frac{٣ أ}{٥ ب} = \frac{١}{٢}$ فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ... (الإسكندرية ٢٠ ، البحر الأحمر ١١)

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٣ إذا كان : ٤ س = ٥ ص فإن : $\frac{٥ ص}{٤ س}$ = ... (قنا ١١)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ إذا كان : ٣ أ = ٥ ب فإن : $\frac{٣ أ}{ب}$ = ... (الفيوم ١٧)

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٨}$

٥ إذا كان : ٢ س = ٧ ص فإن : $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-١}$ = ... (الفيوم ٠٩)

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) $\frac{٤٩}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٤٩}$

٦ إذا كانت : أ ، ب ، ٢ ، ٣ متناسبة فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ... (القليوبية ١٧)

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

٧ إذا كانت : أ ، س ، ب ، ٢ س كميات متناسبة

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ... (أسوان ١٧ ، دمياط ١٦)

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٨ إذا كانت : ٥ أ ، ٢ ، ٣ ب ، ٧ أربع كميات متناسبة

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ... (سوهاج ١٣)

(أ) $\frac{٣}{٧}$ (ب) $\frac{٦}{٣٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٩ إذا كانت : ٤ $س^٢$ = ٩ $ص^٢$ فإن : $\frac{س}{ص}$ = ... (بني سويف ١٦)

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ± $\frac{٢}{٣}$ (د) ± $\frac{٣}{٢}$

١٠ إذا كان : $\frac{أ + ٢ ب}{أ - ب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ... (المنوفية ٢٠ ، الإسكندرية ١١)

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) ٨ (جـ) − $\frac{١}{٨}$ (د) − ٨

١١ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة فإن : ....

(أ) $\frac{ب}{ء}$ = $\frac{أ}{حـ}$ (ب) $\frac{أ}{حـ}$ = $\frac{ء}{ب}$ (جـ) $\frac{ب}{حـ}$ = $\frac{أ}{ء}$ (د) أ ب = حـ ء

١٢ $\frac{١٨ س^٢ ص}{............}$ = $\frac{٣ س}{٥ ص}$

(أ) ٢٠ س $ص^٢$ (ب) ٣٠ س ص (جـ) ٣٠ س $ص^٢$ (د) ١٥ س ص

١٣ $\frac{أ + ب}{أ} = \frac{\dots\dots}{أ^2}$

(أ) $أ^2 + ب^2$ (ب) $أ^2 + أ ب$ (جـ) $أ^2 + أ^2 ب$ (د) $2 أ + 2 ب$

١٤ إذا كان : $4 س^2 + 9 ص^2 = 12 س ص$ فإن : $\frac{س}{ص} = \dots\dots\dots$ (القليوبية ٠٩)

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) $-\frac{2}{3}$ (د) $-\frac{3}{2}$

٣ أوجد كلًا مما يأتى :

١ الأول المتناسب للأعداد : ... ، $\sqrt{8}$ ، ٧ ، $14\sqrt{2}$

٢ الثالث المتناسب للكميات : أ ، (أ + ب) ، ... ، $(أ^2 - ب^2)$

٣ الرابع المتناسب للكميات : (أ + ب) ، (أ − ب) ، (أ − ب) ، ...

٤ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى إذا كان :

١ (٢ س − ٣) : (س − ٥) = ١ : ٤ «١»

٢ (س − ٥) : (٥ س + ٣) = ٢ : ٣ «−٣»

٣ $(س^2 - 8) : (2 س^2 + 1) = 1 : 3$ «± ٥»

٤ $(س^2 + 10 س) : (2 س^2 - 3) = 24 : 5$ حيث س عدد صحيح. «٢»

٥ إذا كان : $\frac{س - 2 ص}{س + 3 ص} = \frac{1}{3}$ أوجد : $\frac{ص}{س}$ (أسوان ١٥) «$\frac{2}{9}$»

٦ إذا كان : $\frac{2 س + 3}{2 س - 3} = \frac{2 ص + 5}{2 ص - 5}$ أثبت أن : $\frac{س}{ص} = \frac{3}{5}$

٧ إذا كان : $س^2 - 4 ص^2 = 3 س ص$ فأوجد س : ص «−١ : ١ أ ٤ : ١»

٨ إذا كان : $3 س^2 - 10 س ص + 7 ص^2 = 0$ ، س ≠ ص

فأوجد النسبة س : ص «٧ : ٣»

٩ إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة النسبة : $\frac{٣ س + ٢ ص}{٦ ص - س}$

(المنيا ٢٠، سوهاج ١٩) «$\frac{٣}{٤}$»

١٠ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة : ٧ أ + ٩ ب : ٤ أ + ٢ ب (القاهرة ٢٠، قنا ١٥) «٣»

١١ إذا كانت : ٤ أ = ٣ ب فأوجد قيمة :

١) $\frac{٤ أ + ب}{٢ أ - ب}$ «٨»

٢) $\frac{ب^٢ - أ^٢}{أ^٢ - ب^٢}$ «-١»

١٢ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{ح}{ى} = \frac{٧}{٢}$ فأوجد النسبة : $\frac{٢ أ ح + ب ى}{ب ح - ٣ أ ى}$ «$\frac{٤}{٣}$»

١٣ إذا كان : ٧ س - ٣ ص : س + ص = ٣ : ١

فأوجد النسبة : ١٢ س + ٩ ص : ١١ س - ٣ ص «٢ : ١»

١٤ إذا كان : $\frac{٢١ س + أ}{٧ س + ب} = \frac{أ}{ب}$ ، س ≠ ٠

فأوجد قيمة : $\frac{أ + ٢ ب}{٢ أ}$ (الإسماعيلية ١٣) «$\frac{٥}{٦}$»

١٥ أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢

فإنها تكون متناسبة. (أسيوط ١٨، ج.سيناء ١٧) «٢»

١٦ أوجد العدد الذى إذا طُرح من كل من الأعداد ١٦ ، ٢١ ، ١٤ ، ١٨

حصلنا على أعداد متناسبة. «٦»

١٧ أثبت أن : أ ، ب ، ح ، ى كميات متناسبة إذا كان :

١) $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{ح + ى}{ى}$ (الفيوم ٠٩)

٢) $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{ح}{ى - ح}$ (أسوان ٢٠، الشرقية ١٥، الفيوم ١٥)

٣) $\frac{أ - ب}{أ + ب} = \frac{ح - ى}{ح + ى}$

٤) $\frac{أ^٢ - ٢ ح^٢}{ب^٢ - ٢ ى^٢} = \frac{أ^٢}{ب^٢}$ حيث أ ، ب ، ح ، ى كميات موجبة.

١٨ إذا كان أ : ب : ح = ٥ : ٧ : ٣ وكان : أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، ح «١١,٥ ، ١٦,١ ، ٦,٩»

١٩ إذا كان أ : ب : ح = ٣ : ٤ : ٥ أوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}}{\text{أ}\,(\text{ب} + \text{ح})}$ «$\frac{٥٠}{٢٧}$»

٢٠ إذا كان : ٢ أ = ٣ ب = ٤ ح فأوجد أ : ب : ح «٦ : ٤ : ٣»

٢١ أجب عما يأتى :

١ أوجد العدد الذى إذا أُضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١

فإنها تصبح ٢ : ٣ (الجيزة ١٩ ، الفيوم ١٨ ، القاهرة ١٧ ، الإسكندرية ١٤) «١»

٢ أوجد العدد الذى إذا طُرح ثلاثة أمثاله من حدى النسبة $\frac{٤٩}{٦٩}$

فإنها تصبح $\frac{٢}{٣}$ (البحيرة ٢٠ ، الجيزة ١٢) «٣»

٣ أوجد العدد الذى إذا أُضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١

فإنها تصبح ٤ : ٥ (المنوفية ٢٠ ، السويس ١٧) «٣ أ ، -٣»

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا أُضيف مربعه إلى حدى النسبة ٥ : ١١

فإنها تصبح ٣ : ٥ (بنى سويف ٢٠ ، الجيزة ١٩ ، كفر الشيخ ١٧) «٢»

٥ ما العدد الذى إذا طُرح من مقدم النسبة ١٥ : ١٣ وأُضيف إلى تاليها

فإنها تصبح ٣ : ٤ ؟ (الأقصر ٢٠) «٣»

٦ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طُرح من كل منهما ٥ أصبحت

النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين. (الإسماعيلية ٢٠ ، الإسكندرية ١٨) «١٥ ، ٣٥»

٧ عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ ، وإذا أُضيف للأول ٧ وطُرح من الثانى

١٢ صارت النسبة بينهما ٥ : ٣ أوجد العددين. (مطروح ١٨ ، بنى سويف ١٧) «١٨ ، ٢٧»

٨ عددان حقيقيان موجبان النسبة بينهما ٤ : ٧ ومربع أصغرهما يزيد عن خمسة أمثال

أكبرهما بمقدار ٣٩ أوجد العددين. «١٢ ، ٢١»

تطبيقات هندسية

٢٢ مستطيل النسبة بين بُعديه ٤ : ٧ ومحيطه ٨٨ سم أوجد مساحته. «٤٤٨ سم^2»

٢٣ مثلث النسبة بين طول قاعدته وارتفاعه ٣ : ٢ ومساحته ٤٨ سم^2

أوجد طول قاعدته وارتفاعه. «١٢ سم ، ٨ سم»

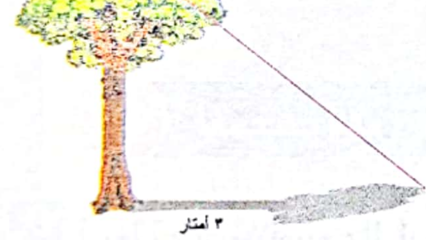
٢٤ فى الشكل المقابل :

قامت آلاء بتظليل $\frac{٥}{٦}$ مساحة الدائرة ، $\frac{٢}{٣}$ مساحة المثلث

أوجد النسبة بين :

مساحة الدائرة : مساحة المثلث. (الجيزة ٠٨) «٢ : ١»

تطبيقات حياتية




٢٥ يبلغ طول ظل شجرة ٣ أمتار فى الوقت الذى يكون فيه طول ظل إسلام ١٢٠ سم فإذا كان طول إسلام ١٨٠ سم أوجد ارتفاع الشجرة. «$٤\frac{١}{٢}$ م»

٢٦ فى مجال اهتمام الدولة بالريف المصرى ، رصدت الدولة مبلغ ١,٨٥ × ١٠^٦ جنيه لإحدى القرى لبناء مدرسة ، ووحدة صحية ، ومركز شباب ، فإذا كانت تكاليف المدرسة $\frac{٣}{٢}$ من تكاليف الوحدة الصحية، وتكاليف الوحدة الصحية $\frac{٥}{٦}$ من تكاليف مركز الشباب ، فما هى تكاليف كل منها ؟



«٧,٥ × ١٠^٥ ، ٥ × ١٠^٥ ، ٦ × ١٠^٥»

٢٧ إذا كانت نسبة النجاح فى إحدى المحافظات للشهادة الإعدادية هى ٨٣٪ وكانت نسبة النجاح للبنين ٧٩٪ ، ونسبة النجاح للبنات ٨٩٪ فأوجد النسبة بين عدد البنين إلى عدد البنات فى هذه المحافظة.



«٢ : ٣»

٢٨ قطعة من السلك طولها ١٥٢ سم قُسمت إلى جزءين النسبة بينهما كنسبة ١١ : ٨ ، وصُنع من الجزء الأكبر دائرة ومن الجزء الأصغر مربع.

أوجد النسبة بين مساحة المربع ومساحة الدائرة. $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$



«٧٧ : ٣٢»

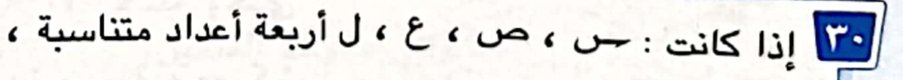


للمتفوقين

٢٩ أربعة أعداد متناسبة ، الرابع المتناسب يساوى مربع الثانى المتناسب ، الأول المتناسب ينقص عن الثانى المتناسب بمقدار ٢ ، والثالث المتناسب يساوى ٨ أوجد الأعداد الأربعة.

«٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ أ، −٤ ، −٢ ، ٨ ، ٤»

٣٠ إذا كانت : س ، ص ، ع ، ل أربعة أعداد متناسبة ،



وكان : س + ص = ٨ ، ص + ع = ١٤ ، ع + ل = ٢٤

فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع ، ل

«٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٥»

٣١ أوجد العدد الموجب الذى إذا أُضيف معكوسه الضربى إلى تالى النسبة $\frac{٢}{٣}$ أصبحت $\frac{٢}{٥}$

«٣»



تابع خواص التناسب

فى هذا الدرس سوف نتناول خاصية (٥) من خواص التناسب ، وقبل دراسة هذه الخاصية سوف نتناول ملاحظة هامة فى التناسب تساعد فى حل المسائل.

ملاحظة هامة

* إذا كانت ا ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة وفرضنا أن : $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء} = م$

فإن : ا = ب م ، حـ = ء م

فمثلًا : إذا كان : $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{٣}{٤}$ فإن : ا = $\frac{٣}{٤}$ ب ، حـ = $\frac{٣}{٤}$ ء

* وبصفة عامة إذا كانت ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، ... كميات متناسبة

وفرضنا أن : $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ... = م$

فإن : ا = ب م ، حـ = ء م ، هـ = و م ، ...

مثال ١

إذا كانت : ا ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

فأثبت أن : ١ $\frac{٢ا + ٣حـ}{٧ا - ٥حـ} = \frac{٢ب + ٣ء}{٧ب - ٥ء}$ ٢ $\frac{ا + حـ}{ب + ء} = \frac{ا^٢ + حـ^٢}{اب + حـ ء}$

الحـــل

١ نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ ∴ $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{ء م}$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{\text{٢ب م} + \text{٣ء م}}{\text{٧ب م} - \text{٥ء م}} = \frac{\text{م}(\text{٢ب} + \text{٣ء})}{\text{م}(\text{٧ب} - \text{٥ء})} = \frac{\text{٢ب} + \text{٣ء}}{\text{٧ب} - \text{٥ء}}$ = الطرف الأيسر

٢ نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ ∴ $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{ء م}$

∵ $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{ء}} = \frac{\text{ب م} + \text{ء م}}{\text{ب} + \text{ء}} = \frac{\text{م}(\text{ب} + \text{ء})}{\text{ب} + \text{ء}} = \text{م}$ (١)

، ∵ $\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}{\text{أ ب} + \text{جـ ء}} = \frac{(\text{ب م})^2 + (\text{ء م})^2}{(\text{ب م})\text{ب} + (\text{ء م})\text{ء}} = \frac{\text{ب}^2\text{م}^2 + \text{ء}^2\text{م}^2}{\text{ب}^2\text{م} + \text{ء}^2\text{م}} = \frac{\text{م}^2(\text{ب}^2 + \text{ء}^2)}{\text{م}(\text{ب}^2 + \text{ء}^2)} = \text{م}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{ء}} = \frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}{\text{أ ب} + \text{جـ ء}}$

مثال ٢

إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و كميات متناسبة موجبة فأثبت أن : $\sqrt{\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2 + \text{هـ}^2}{\text{ب}^2 + \text{ء}^2 + \text{و}^2}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

الحـــل

نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \text{م}$ ∴ $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{ء م}$ ، $\text{هـ} = \text{و م}$

∴ $\sqrt{\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2 + \text{هـ}^2}{\text{ب}^2 + \text{ء}^2 + \text{و}^2}} = \sqrt{\frac{(\text{ب م})^2 + (\text{ء م})^2 + (\text{و م})^2}{\text{ب}^2 + \text{ء}^2 + \text{و}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ب}^2\text{م}^2 + \text{ء}^2\text{م}^2 + \text{و}^2\text{م}^2}{\text{ب}^2 + \text{ء}^2 + \text{و}^2}}$

$= \sqrt{\frac{\text{م}^2(\text{ب}^2 + \text{ء}^2 + \text{و}^2)}{\text{ب}^2 + \text{ء}^2 + \text{و}^2}} = \sqrt{\text{م}^2} = \text{م}$

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{م}$ ∴ $\sqrt{\frac{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2 + \text{هـ}^2}{\text{ب}^2 + \text{ء}^2 + \text{و}^2}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

حاول بنفسك ١

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{٥أ} - \text{٢جـ}}{\text{٥ب} - \text{٢ء}} = \frac{\text{٤أ} + \text{٣جـ}}{\text{٤ب} + \text{٣ء}}$

خاصية ٥

نعلم أن : $\frac{٩}{١٥} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

* فإذا جمعنا مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية نحصل على النسبة $\frac{٩ + ٦}{١٥ + ١٠} = \frac{١٥}{٢٥}$ وهى تساوى $\left(\frac{٣}{٥}\right)$ إحدى نسب التناسب المعطى.

، كذلك إذا جمعنا مقدمات وتوالى النسبتين الثانية والثالثة نحصل على النسبة $\frac{٦ + ٣}{١٠ + ٥} = \frac{٩}{١٥}$ = إحدى النسب

، وإذا جمعنا مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثالثة نحصل على النسبة $\frac{٩ + ٣}{١٥ + ٥} = \frac{١٢}{٢٠} = \frac{٣}{٥}$ = إحدى النسب

، وإذا جمعنا مقدمات وتوالى النسب الثلاث نحصل على النسبة $\frac{٩ + ٦ + ٣}{١٥ + ١٠ + ٥} = \frac{١٨}{٣٠} = \frac{٣}{٥}$ = إحدى النسب

* ولما كانت النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها فى أى عدد حقيقى خلاف الصفر ،

فإذا ضربنا حدى النسبة الأولى فى أى عدد مثل ٢

وضربنا حدى النسبة الثانية فى أى عدد آخر مثل (−٤)

فإن التناسب السابق يظل صحيحًا أى يكون $\frac{١٨}{٣٠} = \frac{-٢٤}{-٤٠} = \frac{٣}{٥}$

فإذا جمعنا مقدمات وتوالى النسبتين الأولى والثانية نحصل على النسبة $\frac{١٨ - ٢٤}{٣٠ - ٤٠} = \frac{-٦}{-١٠} = \frac{٣}{٥}$ = إحدى النسب

، وإذا جمعنا مقدمات وتوالى النسب الثلاث نحصل على النسبة $\frac{١٨ - ٢٤ + ٣}{٣٠ - ٤٠ + ٥} = \frac{-٣}{-٥} = \frac{٣}{٥}$ = إحدى النسب

من النقاط السابقة يمكن أن نقول إنه : إذا كانت لدينا مجموعة من النسب المتساوية فإنه يمكننا الحصول على العديد من النسب الأخرى التى كل منها يساوى أى نسبة من النسب الأصلية وذلك عن طريق جمع مقدمات وتوالى كل النسب أو بعضها سواء مباشرة أو بعد ضرب حدى كل نسبة فى أى عدد حقيقى لا يساوى الصفر.

أى أنه :

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \dots$ وكانت : م_1 ، م_2 ، م_3 ، ... أعدادًا حقيقية لا تساوى الصفر

فإن : $\frac{\text{م}_1\,\text{أ} + \text{م}_2\,\text{ح} + \text{م}_3\,\text{هـ} + \dots}{\text{م}_1\,\text{ب} + \text{م}_2\,\text{ء} + \text{م}_3\,\text{و} + \dots} =$ إحدى النسب.

ملاحظة : يمكن حل المسألة الأولى فى مثال (١) باستخدام الخاصية السابقة كالتالى :

∵ أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{ء}}$

بضرب حدى النسبة الأولى فى ٢ والنسبة الثانية فى ٣

فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب

∴ $\frac{\text{٢أ} + \text{٣ح}}{\text{٢ب} + \text{٣ء}} =$ إحدى النسب (١)

وبضرب حدى النسبة الأولى فى ٧ والنسبة الثانية فى −٥

فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب

∴ $\frac{\text{٧أ} - \text{٥ح}}{\text{٧ب} - \text{٥ء}} =$ إحدى النسب (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{٢أ} + \text{٣ح}}{\text{٢ب} + \text{٣ء}} = \frac{\text{٧أ} - \text{٥ح}}{\text{٧ب} - \text{٥ء}}$ ∴ $\frac{\text{٢أ} + \text{٣ح}}{\text{٧أ} - \text{٥ح}} = \frac{\text{٢ب} + \text{٣ء}}{\text{٧ب} - \text{٥ء}}$

مثال ٣

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٤} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{ح}}{٣}$ **فأثبت أن :** $\frac{\text{أ} - \text{ب} + \text{ح}}{\text{أ} + \text{ب} - \text{ح}} = \frac{١}{٣}$

الحل

بضرب حدى النسبة الثانية فى (−١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث :

∴ $\frac{\text{أ} - \text{ب} + \text{ح}}{٤ - ٥ + ٣} = \frac{\text{أ} - \text{ب} + \text{ح}}{٢} =$ إحدى النسب (١)

بضرب حدى النسبة الثالثة فى (−١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث :

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب} - \text{ح}}{٤ + ٥ - ٣} = \frac{\text{أ} + \text{ب} - \text{ح}}{٦} =$ إحدى النسب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ} - \text{ب} + \text{ح}}{٢} = \frac{\text{أ} + \text{ب} - \text{ح}}{٦}$

∴ $\frac{\text{أ} - \text{ب} + \text{ح}}{\text{أ} + \text{ب} - \text{ح}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

مثال ٤

إذا كان : $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{١١} = \frac{\text{ب} + \text{ح}}{٩} = \frac{\text{ح} + \text{أ}}{٤}$ **فأثبت أن :** $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ح}}{\text{٥أ} + \text{٤ب} + \text{٣ح}} = \frac{٦}{٢٥}$

الحل

بجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث :

فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب

∴ $\frac{\text{٢أ} + \text{٢ب} + \text{٢ح}}{٢٤} =$ إحدى النسب

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ح}}{١٢} =$ إحدى النسب (١)

وبضرب حدى النسبة الأولى فى (٣) والثالثة فى (٢) وجمع المقدمات والتوالى للنسب الثلاث :

فإن مجموع المقدمات : مجموع التوالى = إحدى النسب

∴ $\frac{\text{٣أ} + \text{٣ب} + \text{ب} + \text{ح} + \text{٢ح} + \text{٢أ}}{٣٣ + ٩ + ٨} =$ إحدى النسب

∴ $\frac{\text{٥أ} + \text{٤ب} + \text{٣ح}}{٥٠} =$ إحدى النسب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ح}}{١٢} = \frac{\text{٥أ} + \text{٤ب} + \text{٣ح}}{٥٠}$

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{ح}}{\text{٥أ} + \text{٤ب} + \text{٣ح}} = \frac{١٢}{٥٠} = \frac{٦}{٢٥}$

مثال ٥

إذا كان : $\frac{\text{أ} + 4\text{ب}}{\text{س} + 2\text{ص}} = \frac{4\text{ب} + 7\text{حـ}}{2\text{ص} + 5\text{ع}} = \frac{7\text{حـ} + \text{أ}}{5\text{ع} + \text{س}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{أ}}{2\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الحــل

بضرب حدى النسبة الثانية فى (−١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث :

$$\therefore \frac{\text{أ} + 4\text{ب} - 4\text{ب} - 7\text{حـ} + 7\text{حـ} + \text{أ}}{\text{س} + 2\text{ص} - 2\text{ص} - 5\text{ع} + 5\text{ع} + \text{س}} = \frac{2\text{أ}}{2\text{س}} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \text{إحدى النسب} \quad (1)$$

وبضرب حدى النسبة الثالثة فى (−١) وجمع مقدمات وتوالى النسب الثلاث :

$$\therefore \frac{\text{أ} + 4\text{ب} + 4\text{ب} + 7\text{حـ} - 7\text{حـ} - \text{أ}}{\text{س} + 2\text{ص} + 2\text{ص} + 5\text{ع} - 5\text{ع} - \text{س}} = \frac{8\text{ب}}{4\text{ص}} = \frac{2\text{ب}}{\text{ص}} = \text{إحدى النسب} \quad (2)$$

من (١) ، (٢) :

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{2\text{ب}}{\text{ص}} \qquad \therefore \frac{\text{أ}}{2\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

حاول بنفسك ٢

إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{أ} - 2\text{ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب} - 2\text{حـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{حـ} - 2\text{أ}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{س} + 2\text{ص} - \text{ع}}{3\text{أ} - 5\text{حـ}} = \frac{\text{ص} + 2\text{ع}}{\text{ب} - 4\text{أ}}$





تمارين 6





اختبار تفاعلى



أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}} =$ .... (الفيوم ٠٩)

٢ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{\text{أ} - ٢\text{جـ} + \text{هـ}}{\text{ب} - ٢\text{د} + \text{و}} =$ ....

٣ $\frac{\text{س}}{٦} = \frac{\text{ص}}{٥} = \frac{\text{ع}}{٤} = \frac{\text{..........}}{١١} = \frac{٢\text{ص} - \text{ع}}{\text{..........}} = \frac{٣\text{س} - ٥\text{ص} + ٤\text{ع}}{\text{..........}}$

٤ إذا كان : $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٥} = \frac{\text{ص} + \text{هـ}}{٣} = \frac{\text{هـ} + \text{س}}{٦}$ فإن : $\frac{\text{س} - \text{هـ}}{٢} = \frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{..........}}$

٥ إذا كان : $\frac{٤}{\text{س}} = \frac{٧}{\text{ص}} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - \text{س}}$ فإن : أ = ... (القاهرة ٠٩)

٦ $\frac{\text{ل}}{٣} = \frac{\text{م}}{٨} = \frac{\text{ل} + \frac{١}{٢}\text{م}}{\text{..........}}$ (الدقهلية ٠٨)

٧ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ فإن : $\frac{٥\text{أ} + ٣\text{جـ} + \text{.........}}{٥\text{ب} + \text{.........} + ٤\text{و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (دمياط ٠٨)

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ حيث م $\neq$ صفر فإن : $\frac{\text{أ} \times \text{جـ}}{\text{ب} \times \text{د}} =$ .... (القاهرة ١٧)

(أ) ٢ م^{٢} (ب) م^{٢} (جـ) م (د) ٢ م

٢ إذا كانت : $\frac{\text{أ}}{٥} = \frac{\text{ب}}{٧}$ فإن : ٧ أ − ٥ ب + ٣ = ... (بورسعيد ٠٩)

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٢

٣ إذا كان : $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{س} + ٢\text{ص}}{\text{ك}}$ فإن : ك = ... (الغربية ١٧)

(أ) ٩ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ٨

٤ إذا كانت : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ فإن : $\frac{\text{أ} + ٢\text{جـ} + ٣\text{هـ}}{\text{ب} + ٢\text{د} + ٣\text{و}} = \frac{\text{..........}}{٥\text{و}}$

(أ) ٥ أ (ب) ٥ جـ

(جـ) ٥ هـ (د) ٥ أ + ٥ جـ + ٥ هـ

٥ إذا كان : $\frac{أ}{٤} = \frac{ب}{٥}$ ، $٢أ + ٣ب = ٤٦$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٨

٦ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{ح} = \frac{٤}{٥}$ فإن ب : ح = ... (الغربية ١٧)

(أ) ٣ : ٤ (ب) ٥ : ٦ (جـ) ٦ : ٥ (د) ٤ : ٣

٣ إذا كانت : أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة فأثبت أن :

١ $\frac{٣أ + ح}{٥أ - ٢ح} = \frac{٣ب + ء}{٥ب - ٢ء}$ (أسيوط ١٧)

٢ $\frac{٣أ - ٢ح}{٥أ + ٣ح} = \frac{٣ب - ٢ء}{٥ب + ٣ء}$ (كفر الشيخ ١٨ ، السويس ١٦)

٣ $\frac{أ^{٢} + ح^{٢}}{أب + حء} = \frac{أ}{ب}$ (المنوفية ١١)

٤ $\frac{أ^{٢} + ح^{٢}}{ب^{٢} + ء^{٢}} = \frac{أح}{بء}$ (الغربية ١٨ ، القليوبية ١٧ ، المنوفية ١٦)

٥ $\frac{أح}{بء} = \left(\frac{أ - ح}{ب - ء}\right)^{٢}$ (السويس ١٨ ، الإسكندرية ١٤)

٦ $\left(\frac{أ + ب}{ح + ء}\right)^{٢} = \frac{٢أ^{٢} - ٣ب^{٢}}{٢ح^{٢} - ٣ء^{٢}}$

٧ $\sqrt{\frac{٣أ^{٢} - ٥ح^{٢}}{٣ب^{٢} - ٥ء^{٢}}} = \frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ، ح ، ء كميات موجبة.

٨ $\sqrt[٣]{\frac{٥أ^{٣} - ٣ح^{٣}}{٥ب^{٣} - ٣ء^{٣}}} = \frac{أ + ح}{ب + ء}$ (القليوبية ١٩)

٩ $\frac{أ^{٢} - ٢أح + ح^{٢}}{أح} = \frac{ب^{٢} - ٢بء + ء^{٢}}{بء}$ (الإسماعيلية ١٨)

٤ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و}$ فأثبت أن :

١ $\frac{أ + ٥ح}{ب + ٥ء} = \frac{ح - ٣هـ}{ء - ٣و}$

٢ $\frac{٢أ + ٧ح - ٤هـ}{٢ب + ٧ء - ٤و} = \frac{أ - ٨هـ}{ب - ٨و}$

٣ $\frac{٢أ^{٤}ب^{٢} + ٣أ^{٢}هـ^{٢} - ٥هـ^{٤}و}{٢ب^{٦} + ٣ب^{٢}و^{٢} - ٥و^{٥}} = \frac{أ^{٤}}{ب^{٤}}$

٤ $\sqrt{\frac{٥أ^{٢} - ٧حهـ}{٥ب^{٢} - ٧ءو}} = \frac{٢أ + ح}{٢ب + ء}$

٥ إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ **فأثبت أن :**

١ $\frac{٢ ص - ع}{٣ س - ٢ ص + ع} = \frac{١}{٢}$ (بنى سويف ٢٠ ، بورسعيد ١٩ ، ش. سيناء ١٨ ، الجيزة ١٥)

٢ $\sqrt{٣ س^٢ + ٣ ص^٢ + ع^٢} = ٢ س + ص$ (دمياط ١٩ ، سوهاج ١٦ ، المنيا ١٢)

---

٦ إذا كان : $س = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ **أثبت أن :** $\frac{س + ص - ٢ ع}{س - ٣ ع} = \frac{٣}{٨}$ (أسيوط ١٧)

---

٧ إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤}$ **فأثبت أن :** ٢ أ − ٥ ب + ٣ جـ = إحدى النسب.

---

٨ إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢ أ - ب + ٥ جـ}{٣ س}$

فأوجد : قيمة س (القليوبية ٢٠ ، أسوان ١٩ ، الأقصر ١٨ ، قنا ١٧ ، الغربية ١٦) «٧»

---

٩ إذا كان : $\frac{أ}{٤ س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ ص}$

أثبت أن : $\frac{أ + ب}{٥ س - ٣ ص} = \frac{أ - ب}{٣ س + ٥ ص}$ (الدقهلية ١٩ ، دمياط ١٢)

---

١٠ إذا كان : $\frac{س + ص}{١٩} = \frac{ص + ع}{٧}$ **أثبت أن :** $\frac{س + ٢ ص + ع}{١٣} = \frac{س - ع}{٦}$

---

١١ إذا كانت : $\frac{ص}{س - ع} = \frac{س}{ص} = \frac{س + ص}{ع}$

فأثبت أن : كلاً من هذه النسب يساوى ٢ (ما لم تكن س + ص = ٠)

ثم أوجد س : ص : ع (البحيرة ١٨) «٤ : ٢ : ٣»

---

١٢ إذا كان : $\frac{س}{أ - ب + جـ} = \frac{ص}{ب - جـ + أ} = \frac{ع}{جـ - أ + ب}$

فأثبت أن : $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب}$ (بورسعيد ٠٩)

---

١٣ إذا كان : $\frac{س}{٢ أ + ب} = \frac{ص}{٢ ب - جـ} = \frac{ع}{٢ جـ - أ}$

فأثبت أن : $\frac{٢ س + ص}{٤ أ + ٤ ب - جـ} = \frac{٢ س + ٢ ص + ع}{٣ أ + ٦ ب}$ (مطروح ١٩ ، القليوبية ١٨ ، البحيرة ١٧)

١٤ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٢ س − ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{٢ ص − س}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{٢ أ + ب}}{\text{أ + ٢ ب}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

١٥ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٢ س + ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣ ص − س}} = \frac{\text{حـ}}{\text{٤ س + ٥ ص}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{أ + ٢ ب}}{\text{٤ ب + حـ}} = \frac{\text{٧}}{\text{١٧}}$

١٦ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٧}} = \frac{\text{حـ}}{\text{٣}}$ فأوجد قيمة : $\frac{\text{أ + ٢ ب}}{\text{ب − حـ}}$ (ش. سيناء ٠٩)

١٧ إذا كان : $\frac{\text{س + ص}}{\text{٧}} = \frac{\text{ص + ع}}{\text{٥}} = \frac{\text{ع + س}}{\text{٨}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{س − ع}} = \text{٥}$ (المنوفية ٦

١٨ إذا كان : $\frac{\text{أ + ب}}{\text{٤}} = \frac{\text{ب + حـ}}{\text{٥}} = \frac{\text{حـ + أ}}{\text{٧}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{٨}} = \frac{\text{أ}}{\text{٣}}$ (كفر الشيخ ٥

١٩ إذا كان : $\frac{\text{س + ص}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص + ع}}{\text{٨}} = \frac{\text{ع + س}}{\text{٦}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{س + ص + ع}}{\text{٢ س + ٣ ص + ٣ ع}} = \frac{\text{١٧}}{\text{٥٠}}$ (كفر الشيخ ٢٠

٢٠ إذا كان : $\frac{\text{س + ص}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص + ع}}{\text{٨}} = \frac{\text{ع + س}}{\text{٧}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \frac{\text{ص}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع}}{\text{٥}}$ (الوادى الجديد ١٧

٢١ إذا كان : $\frac{\text{س + ص}}{\text{٢٥}} = \frac{\text{س − ص}}{\text{١١}} = \frac{\text{س + ص − ع}}{\text{٨}}$

فأثبت أن س : ص : ع = ١٨ : ٧ : ١٧

٢٢ إذا كان : $\frac{\text{أ + ٣ ب}}{\text{س + ٦ ص}} = \frac{\text{٣ ب + ٥ حـ}}{\text{٦ ص + ١٠ ع}} = \frac{\text{٥ حـ + أ}}{\text{١٠ ع + س}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{٢ ص}}$ ثم أوجد أ : ب : حـ

«س : ٢ ص : ٢ ع

٢٣ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٣ س + ٤ ص}} = \frac{\text{ب}}{\text{٥ س − ٢ ص}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ص + ٢ س}}$

فأثبت أن : ١٣ س (٣ حـ − ٢ أ) + ٥ ص (أ + ٢ ب) = صفر

٢٤ إذا كان : $\frac{س}{٧} = \frac{ص}{٣}$

فأثبت أن : (٢ س − ٣ ص) ، (س + ٢ ص) ، ١٠ ، ٢٦ متناسبة. (الأقصر١٩)

٢٥ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{أ}{ج} = \frac{٣}{٧}$

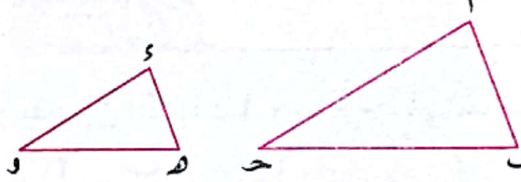
فأوجد قيمة المقدار : أ + ب + ج بدلالة أ «٥ أ»

٢٦ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{ج} = \frac{٣}{٥}$ ، أ + ب + ج = ٧٥

فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، ج (البحر الأحمر١٦) «١٨ ، ٢٧ ، ٣٠»

تطبيق هندسى

٢٧ فى الشكل المقابل :



إذا كان : Δ أ ب ج ∼ Δ د هـ و

بحيث د و : أ ج = ٢ : ٣ وكان محيط Δ د هـ و = ٢٢ سم

فأوجد : محيط Δ أ ب ج «٣٣ سم»

للمتفوقين

٢٨ إذا كان : $\frac{أ}{س - ص + ع} = \frac{ب}{س + ص - ع} = \frac{ج}{ص + ع - س}$

فأثبت أن : كل نسبة $= \frac{أ س + ب ص + ج ع}{س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}}$

٢٩ إذا كان : $\frac{٢ س + ص}{س} = \frac{٤ ص + ع}{ص} = \frac{٤ ع + ٣ س}{ع}$ فأوجد النسبة س : ص : ع «١ : ٣ : ٣»

ثم أثبت أن : $\frac{٢ س + ص + ع}{٣ س - ص + ٢ ع} = \frac{٤}{٣}$

٣٠ إذا كان : $\frac{أ + ٢ ب}{٥} = \frac{٣ ب - ج}{٣} = \frac{ج - أ}{٢}$

فأثبت أن : **١** أ + ب − ج = ٠ . **٢** $\frac{٣ ب - أ}{٢ ب + ج} = \frac{٥}{٧}$

الدرس

3

التناسب المتسلسل

تعريف

يقال إن الكميات أ ، ب ، ح فى تناسب متسلسل إذا كان :

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$ أو $ب^{٢} = أ\,ح$

فى هذا التناسب يسمى : أ بالأول المتناسب ، ح بالثالث المتناسب.

أما ب فتسمى بالوسط المتناسب بين أ ، ح

فمثلًا : الأعداد ٤ ، ٦ ، ٩ تكون تناسبًا متسلسلاً

لأن : $\frac{٤}{٦} = \frac{٦}{٩}$ أو لأن : $(٦)^{٢} = ٤ \times ٩$

حيث ٦ هو الوسط المتناسب ، ٤ الأول المتناسب ، ٩ الثالث المتناسب.

لاحظ أنه

- إذا كان : أ ، ب ، ح فى تناسب متسلسل فإن : $ب^{٢} = أ\,ح$ أى $ب = \pm\sqrt{أ\,ح}$
  والكميتان أ ، ح إما أن تكونا موجبتين معًا أو سالبتين معًا.
- لأى عددين س ، ص موجبين معًا أو سالبين معًا يوجد وسطان متناسبان هما : $\sqrt{س\,ص}$ و $-\sqrt{س\,ص}$

مثال ١

أوجد الوسط المتناسب بين كل كميتين :

١ ٥ ، ٢٠ ٢ $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$ ٣ $٢\sqrt{٣}$ ، $٦\sqrt{٣}$

الحل

١ الوسط المتناسب $= \pm\sqrt{٥ \times ٢٠} = \pm\sqrt{١٠٠} = \pm ١٠$

٢ الوسط المتناسب $= \pm\sqrt{ل^{٢} م^{٢}} = \pm\, ل\,م$

٣ الوسط المتناسب $= \pm\sqrt{٢\sqrt{٣} \times ٦\sqrt{٣}} = \pm\sqrt{٣٦} = \pm ٦$

مثال ٢

أوجد الثالث المتناسب لكل كميتين :

١ ١٢ ، ١٨ ٢ $-٨ س^{٢} ص^{٢}$ ، $٤ س^{٣} ص$

الحل

١ نفرض أن الثالث المتناسب هو ح

$\therefore \frac{١٢}{١٨} = \frac{١٨}{ح}$ $\therefore ح = \frac{١٨ \times ١٨}{١٢} = ٢٧$

٢ نفرض أن الثالث المتناسب هو ح

$\therefore \frac{-٨ س^{٢} ص^{٢}}{٤ س^{٣} ص} = \frac{٤ س^{٣} ص}{ح}$

$\therefore ح = \frac{٤ س^{٣} ص \times ٤ س^{٣} ص}{-٨ س^{٢} ص^{٢}} = \frac{١٦ س^{٦} ص^{٢}}{-٨ س^{٢} ص^{٢}} = -٢ س^{٤}$

حاول بنفسك ١

١ أوجد الوسط المتناسب بين ٣٢ ، ١٨ ٢ أوجد الأول المتناسب للعددين ٨ ، ١٦

ملاحظة

إذا كان: أ، ب، ح في تناسب متسلسل وفرضنا أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$

فإن: $\frac{ب}{ح} = م$ ∴ $ب = ح م$ (1)

، ∵ $\frac{أ}{ب} = م$ ∴ $أ = ب م$ وبالتعويض عن ب من (1)

∴ $أ = (ح م) م$ ∴ $أ = ح م^2$

أي أنه:

إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$ فإن: $ب = ح م$ ، $أ = ح م^2$

مثال 3

إذا كانت: أ، ب، ح في تناسب متسلسل فأثبت أن: $\frac{4أ^2 - 3ب^2}{4ب^2 - 3ح^2} = \frac{أ}{ح}$

الحل

نفرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$ ∴ $ب = ح م$ ، $أ = ح م^2$

∴ $\frac{4أ^2 - 3ب^2}{4ب^2 - 3ح^2} = \frac{4(ح م^2)^2 - 3(ح م)^2}{4(ح م)^2 - 3ح^2} = \frac{4ح^2 م^4 - 3ح^2 م^2}{4ح^2 م^2 - 3ح^2}$

$= \frac{ح^2 م^2 (4م^2 - 3)}{ح^2 (4م^2 - 3)} = م^2$ (1)

، $\frac{أ}{ح} = \frac{ح م^2}{ح} = م^2$ (2)

من (1)، (2) ينتج أن: $\frac{4أ^2 - 3ب^2}{4ب^2 - 3ح^2} = \frac{أ}{ح}$

حل آخر:

∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$ ∴ $ب^2 = أ ح$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{4أ^2 - 3أ ح}{4أ ح - 3ح^2} = \frac{أ(4أ - 3ح)}{ح(4أ - 3ح)} = \frac{أ}{ح} =$ الطرف الأيسر

مثال 4

إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ، ح فأثبت أن:

1) $\frac{أ - ب}{أ} = \frac{أ - ح}{أ + ب}$ 2) $أ ب - ح^2 = (ب - ح)(أ + ب + ح)$

الحل

∵ ب وسط متناسب بين أ، ح ∴ أ، ب، ح في تناسب متسلسل.

نفرض أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = م$ ∴ $ب = ح م$ ، $أ = ح م^2$

1) ∵ $\frac{أ - ب}{أ} = \frac{ح م^2 - ح م}{ح م^2} = \frac{ح م (م - 1)}{ح م^2} = \frac{م - 1}{م}$ (1)

، $\frac{أ - ح}{أ + ب} = \frac{ح م^2 - ح}{ح م^2 + ح م} = \frac{ح (م^2 - 1)}{ح م (م + 1)} = \frac{ح (م - 1)(م + 1)}{ح م (م + 1)} = \frac{م - 1}{م}$ (2)

∴ من (1)، (2) ينتج أن: $\frac{أ - ب}{أ} = \frac{أ - ح}{أ + ب}$

2) ∵ $أ ب - ح^2 = ح م^2 \times ح م - ح^2 = ح^2 م^3 - ح^2 = ح^2 (م^3 - 1)$ (1)

، $(ب - ح)(أ + ب + ح) = (ح م - ح)(ح م^2 + ح م + ح)$

$= ح (م - 1) \times ح (م^2 + م + 1)$

$= ح^2 (م - 1)(م^2 + م + 1) = ح^2 (م^3 - 1)$ (2)

∴ من (1)، (2) ينتج أن: $أ ب - ح^2 = (ب - ح)(أ + ب + ح)$

حاول بنفسك 2

إذا كانت: أ، ب، ح في تناسب متسلسل أثبت أن: $\frac{3ح^2 - 4ب^2}{3ب^2 - 4أ^2} = \frac{ح^2}{ب^2}$

تعميم تعريف التناسب المتسلسل

الكميات أ ، ب ، جـ ، د ، ... تكون في تناسب متسلسل إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = ...$

فمثلًا : الأعداد ١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ٥٤ في تناسب متسلسل.

لأن $\frac{١٦}{٢٤} = \frac{٢٤}{٣٦} = \frac{٣٦}{٥٤}$ (كل نسبة = $\frac{٢}{٣}$)

ملاحظة

إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل وفرضنا أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

فإن : $\frac{جـ}{د} = م$ ∴ جـ = د م (١)

، $\frac{ب}{جـ} = م$ ∴ ب = جـ م وبالتعويض من (١)

∴ ب = (د م) م ∴ ب = د $م^٢$ (٢)

، $\frac{أ}{ب} = م$ ∴ أ = ب م وبالتعويض من (٢)

∴ أ = (د $م^٢$) م ∴ أ = د $م^٣$

أي أنه :

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ فإن : جـ = د م ، ب = د $م^٢$ ، أ = د $م^٣$

مثال ٥

إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن : $\frac{أ + د}{ب - جـ + د} = \frac{أ - جـ}{ب - جـ}$

الحل

نفرض أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$

∴ جـ = د م ، ب = د $م^٢$ ، أ = د $م^٣$

∴ $\frac{أ + د}{ب - جـ + د} = \frac{د م^٣ + د}{د م^٢ - د م + د} = \frac{د (م^٣ + ١)}{د (م^٢ - م + ١)} = \frac{(م + ١)(م^٢ - م + ١)}{م^٢ - م + ١} = م + ١$ (١)

، $\frac{أ - جـ}{ب - جـ} = \frac{د م^٣ - د م}{د م^٢ - د م} = \frac{د م (م^٢ - ١)}{د م (م - ١)} = \frac{(م - ١)(م + ١)}{(م - ١)} = م + ١$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{أ + د}{ب - جـ + د} = \frac{أ - جـ}{ب - جـ}$

حاول بنفسك ٣

إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل فأثبت أن : $\frac{أ + ٢ب}{ب + ٢جـ} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$

مثال ٦

إذا كانت الكميات أ ، ٢ب ، ٣جـ ، ٤د في تناسب متسلسل

فأثبت أن : (٢ب − ٣جـ) وسط متناسب بين (أ − ٢ب) ، (٣جـ − ٤د)

الحل

نفرض أن : $\frac{أ}{٢ب} = \frac{٢ب}{٣جـ} = \frac{٣جـ}{٤د} = م$

∴ ٣جـ = ٤د م ، ٢ب = ٤د $م^٢$ ، أ = ٤د $م^٣$

ولإثبات أن : (٢ب − ٣جـ) وسط متناسب بين (أ − ٢ب) ، (٣جـ − ٤د)

يعني إثبات أن : $(٢ب - ٣جـ)^٢ = (أ - ٢ب)(٣جـ - ٤د)$

∵ $(٢ب - ٣جـ)^٢ = (٤د م^٢ - ٤د م)^٢$

$= [٤د م (م - ١)]^٢ = ١٦ د^٢ م^٢ (م - ١)^٢$ (١)

، $(أ - ٢ب)(٣جـ - ٤د) = (٤د م^٣ - ٤د م^٢)(٤د م - ٤د)$

$= ٤د م^٢ (م - ١) \times ٤د (م - ١) = ١٦ د^٢ م^٢ (م - ١)^٢$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : (٢ب − ٣جـ)^{٢} = (أ − ٢ب) (٣جـ − ٤د)

∴ (٢ب − ٣جـ) وسط متناسب بين (أ − ٢ب) ، (٣جـ − ٤د)

حل آخر : ∵ أ ، ٢ب ، ٣جـ ، ٤د في تناسب متسلسل

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{٢ب}} = \frac{\text{٢ب}}{\text{٣جـ}} = \frac{\text{٣جـ}}{\text{٤د}}$$

وبطرح مقدم وتالى النسبة الثانية من مقدم وتالى النسبة الأولى :

$$\therefore \frac{\text{أ} - \text{٢ب}}{\text{٢ب} - \text{٣جـ}} = \text{إحدى النسب} \quad (١)$$

وبطرح مقدم وتالى النسبة الثالثة من مقدم وتالى النسبة الثانية :

$$\therefore \frac{\text{٢ب} - \text{٣جـ}}{\text{٣جـ} - \text{٤د}} = \text{إحدى النسب} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ} - \text{٢ب}}{\text{٢ب} - \text{٣جـ}} = \frac{\text{٢ب} - \text{٣جـ}}{\text{٣جـ} - \text{٤د}}$

∴ (٢ب − ٣جـ) وسط متناسب بين (أ − ٢ب) ، (٣جـ − ٤د)





تمارين 7

على التناسب المتسلسل

📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد الوسط المتناسب بين :

١ 📖 ٣ ، ٢٧ ٢ ٩ ، ٢٥ ٣ -٢ ، -٨ (الجيزة ٠٩)

٤ $\frac{1}{5}$ ، ١٢٥ ٥ ٢أ ، ٨أ$ب^2$ ٦ $(ل + م)^2$ ، $(ل - م)^2$

---

٢ أوجد الثالث المتناسب لكل مما يأتى :

١ ٦ ، ١٢ ٢ $س^2$ ، -٥س ٣ $س^2$ ، -٣$س^2$

---

٣ إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ فأثبت أن :

١ $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب^2}{جـ^2}$ (الجيزة ١٤)

٢ $\frac{2أ + 3ب}{2ب + 3جـ} = \frac{أ}{ب}$ (الإسماعيلية ١٧)

٣ $\frac{أ - ب}{ب - جـ} = \frac{أ + 3ب}{3جـ + ب}$

٤ 📖 $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2 + جـ^2} = \frac{أ}{جـ}$ (القاهرة ٢٠، القليوبية ١٨)

٥ $\left(\frac{ب - جـ}{أ - ب}\right)^2 = \frac{جـ}{أ}$

٦ $\frac{أ^3 + ب^3}{ب^3 + جـ^3} = \frac{أ^2}{ب جـ}$ (المنوفية ١١)

٧ $\frac{أ^2 - 4ب^2}{ب^2 - 4جـ^2} = \frac{ب^2}{جـ^2}$

٨ 📖 $\frac{2جـ^2 - 3ب^2}{2ب^2 - 3أ^2} = \frac{جـ}{أ} = \frac{جـ^2}{ب^2}$

٩ $\frac{أ^2 + أب + ب^2}{ب^2 + ب جـ + جـ^2} = \frac{أ^2 - ب^2}{ب^2 - جـ^2}$

١٠ $\frac{أ^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{جـ^2} = \frac{2أ}{جـ}$ (الدقهلية ١٩، أسوان ١٦، بورسعيد ١٧)

١١ 📖 $\frac{أ + ب + جـ}{أ^{-1} + ب^{-1} + جـ^{-1}} = ب^2$

١٢ $\frac{أ جـ}{ب(ب + جـ)} = \frac{أ}{أ + ب}$ (الغربية ١٧)

٤ إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د فى تناسب متسلسل فأثبت أن :

١ $\frac{أ - ٢ب}{ب - ٢جـ} = \frac{٣ب + ٤جـ}{٣جـ + ٤د}$

٢ $\frac{٣أ + ٥جـ}{٣ب + ٥د} = \frac{أ - ٤جـ}{ب - ٤د}$

٣ $\frac{٣أ - ٥جـ}{أ - ب + جـ} = \frac{٣ب - ٥د}{ب - جـ + د}$

٤ $\frac{أ - د}{أ + ب + جـ} = \frac{أ - ٢ب + جـ}{أ - ب}$

٥ $\frac{جـ^{٢} - د^{٢}}{أ - جـ} = \frac{ب د}{أ}$ (ج.سيناء ٢٠ ، البحيرة ١٨ ، مطروح ١٧)

٦ $\frac{أ^{٢} - ٣جـ^{٢}}{ب^{٢} - ٣د^{٢}} = \frac{ب}{د}$ (بنى سويف ١٨ ، الإسكندرية ١٧ ، البحيرة ١٥)

٧ $\frac{أب - جـد}{ب^{٢} - جـ^{٢}} = \frac{أ + جـ}{ب}$ (المنوفية ٢٠ ، المنوفية ١٧ ، قنا ١٦)

٨ $\frac{أ}{ب + د} = \frac{جـ^{٣}}{جـ^{٢} د + د^{٣}}$ (الفيوم ٢٠ ، الإسكندرية ١٩)

٩ $\frac{أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}}{ب^{٢} + جـ^{٢} + د^{٢}} = \frac{أ جـ}{ب د}$ (الدقهلية ١١)

١٠ $\frac{٢أ + ٣د}{٣أ - ٤د} = \frac{٢أ^{٣} + ٣ب^{٣}}{٣أ^{٣} - ٤ب^{٣}}$

١١ $\frac{أ + ٥ب}{ب + ٥جـ} = \sqrt{\frac{ب}{د}}$

١٢ $\sqrt[٣]{\frac{٥أ^{٣} - ٣جـ^{٣}}{٥ب^{٣} - ٣د^{٣}}} = \frac{أ + جـ}{ب + د}$ (الإسكندرية ١١)

١٣ $\left(\frac{أ + ب}{ب + جـ}\right)^{٣} = \frac{أ}{د}$ (الشرقية ١٥)

١٤ $\frac{أ^{٢} + د^{٢}}{جـ(أ + جـ)} = \frac{ب}{د} + \frac{د}{ب} - ١$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الثالث المتناسب للعددين ٩ ، −١٢ هو .... (البحيرة ١١)

(أ) −١٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ١٠٨

٢ الوسط المتناسب بين س ، ص هو .... (ج.سيناء ١٧)

(أ) $\sqrt{س ص}$ (ب) $-\sqrt{س ص}$ (جـ) $\pm\sqrt{س ص}$ (د) س ص

٣ إذا كانت : ل ، م ، ع فى تناسب متسلسل فإن : ل = ...

(أ) $\pm\sqrt{م ع}$ (ب) م ع (جـ) $\frac{م}{ع}$ (د) $\frac{م^{٢}}{ع}$

٤ إذا كان العدد ٦ هو الوسط المتناسب الموجب للعددين م ، ٢

فإن : م = …………… (أسوان ١٣)

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٣٦

٥ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{٥} = ٢$ فإن : أ = …………… (المنوفية ١٢)

(أ) ٥ × ٢^{٢} (ب) ٤٠ (جـ) ١٠ (د) ٢ × ٥^{٣}

٦ إذا كانت : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = ٢$ فإن : $\frac{أ}{ء}$ = …………… (الشرقية ١٣)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٧ إذا كانت : ٦ أ^{٢} ب^{٢} ، ٣ أ ب ، حـ كميات متناسبة فإن : حـ = ……………

(أ) -٣ (ب) ٣ أ ب (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

٨ إذا كان : أ ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل

فإن : أ + ب = …………… (الدقهلية ٢٠)

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٩

٩ الوسط المتناسب بين (س - ٢) ، (س + ٢) هو …………… (القاهرة ٠٩)

(أ) $\sqrt{س + ٢}$ (ب) س^{٢} - ٤ (جـ) ± $\sqrt{س^{٢} - ٤}$ (د) $\sqrt{س^{٢} - ٤}$

١٠ العدد الذي إذا أُضيف لكل من الأعداد ١ ، ٣ ، ٦ تصبح في تناسب متسلسل

هو …………… (دمياط ١٣)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٦ إذا كان : أ ، ٣ ، ٩ ، ب في تناسب متسلسل **أوجد قيمة كل من : أ ، ب**

(الأقصر ١٦) «١ ، ٢٧»

٧ إذا كان : ٣ ، ل ، ١٢ ، م في تناسب متسلسل **أوجد قيمة كل من : ل ، م** «± ٦ ، ± ٢٤»

8 **أكمل ما يأتى :**

[١] إذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل فإن : $س^٢$ ص = ...

[٢] الثالث المتناسب للكميتين : ٩ $(ر + ١)^٢$ ، ٦ $(ر^٢ - ١)$ هو ....

[٣] الوسط المتناسب للكميتين : ٩ $س^٢$ - ٢٥ $ص^٢$ ، $\frac{٣ س + ٥ ص}{٣ س - ٥ ص}$ هو ....

[٤] إذا كان : $\frac{ص}{س} = \frac{س}{ع} = \frac{٢}{٥}$ فإن : ص = ... ع

[٥] إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ فى تناسب متسلسل وكل نسبة من النسب تساوى الثابت م فإن : $\frac{أ}{هـ}$ = ...

[٦] إذا كانت : أ ، ب ، حـ كميات متناسبة فإن : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + حـ^٢} = \frac{..........}{حـ}$

[٧] العدد الحقيقى س الذى يجعل س + ١ ، س + ٥ ، س + ١٣ متناسبة هو ....

[٨] إذا كانت : ٢ ، ٤ + س ، ١٨ كميات متناسبة ، س ∈ ح ـ فإن : س = ...

9 أوجد العدد الذى إذا طرح من الأعداد ٣ ، ٧ ، ١٩ فإنها تكون تناسبًا متسلسلًا.

(الأقصر ١٧) «١»

10 إذا كان ب وسطًا متناسبًا بين أ ، حـ وكان : أ = ٤ حـ = ٤

فأوجد قيمة : $أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢$

(الفيوم ١٧) «٢١»

11 إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، حـ وكانت حـ وسطًا متناسبًا بين ب ، ء

فأثبت أن : $\frac{أ^٢}{ب^٢} + \frac{ب^٢}{حـ^٢} + \frac{حـ^٢}{ء^٢} = \frac{أ}{حـ} + \frac{ب}{ء} + \frac{أ حـ}{ب ء}$

12 إذا كان : $ص^٢$ = س ع فأثبت أن : $\frac{س (س - ص)}{ص (ص - ع)} = \frac{ص^٢}{ع^٢}$

13 إذا كان : $ب^٢$ = أ حـ ، $حـ^٢$ = ب ء أثبت أن : $\frac{٢ أ + ٣ ء}{٣ أ - ٤ ء} = \frac{٢ أ^٢ + ٣ ب^٢}{٣ أ^٢ - ٤ ب^٢}$

١٤ إذا كان : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢ + حـ^٢}{حـ^٢}$

أثبت أن : ب وسط متناسب بين أ ، حـ حيث أ حـ كمية موجبة. (الإسكندرية ١٥ ، بنى سويف ١٥)

١٥ إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل

أثبت أن : (ب + حـ) وسط متناسب بين : (أ + ب) ، (حـ + ء)

١٦ إذا كانت : ٥ أ ، ٦ ب ، ٧ حـ ، ٨ ء كميات موجبة فى تناسب متسلسل

فأثبت أن : $\sqrt[٣]{\frac{٥ أ}{٨ ء}} = \sqrt{\frac{٥ أ + ٦ ب}{٧ حـ + ٨ ء}}$

١٧ إذا كان : ب وسطًا متناسبًا بين أ ، حـ أثبت أن : $\frac{أ^٤ + ب^٤ + حـ^٤}{أ^{-٤} + ب^{-٤} + حـ^{-٤}} = ب^٨$

تطبيقات هندسية

١٨ س ، ص ، ع أطوال أضلاع متناسبة فى مثلث ، س + ص = ١٥ سم

، ص + ع = ٢٢,٥ سم فأوجد س : ص «٢ : ٣»

١٩ أ ب حـ مثلث فيه : ق (د حـ) = ٦٠° فإذا كانت قياسات زواياه د أ ، د ب ، د حـ على

الترتيب فى تناسب متسلسل فأوجد : ق (د أ) ، ق (د ب) «٦٠° ، ٦٠°»

للمتفوقين

٢٠ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = ٢$

فأوجد مجموعة الحل للمعادلة : أ $س^٢$ − ٢ ب س + حـ = ٠ «$\{\frac{١}{٢}\}$»

٢١ إذا كانت ٥ وسطًا متناسبًا بين س ، ص

فأوجد الوسط المتناسب بين : $(س + \frac{١}{ص})$ ، $(ص + \frac{١}{س})$ «± ٢,٥»



الدرس 4

التغير الطردى والتغير العكسى

أولًا التغير الطردى

تعريف

يقال إن ص تتغير طرديًا مع س وتكتب $ص \propto س$

إذا كان: $ص = م س$ (أى: $\frac{ص}{س} = م$) حيث م ثابت ≠ صفر

والعلاقة $ص = م س$ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

فمثلًا: محيط المربع (ح) يتغير طرديًا مع طول ضلعه (ل) وتكتب $ح \propto ل$

لأن: $ح = ٤ ل$ أو $\frac{ح}{ل} = ٤$

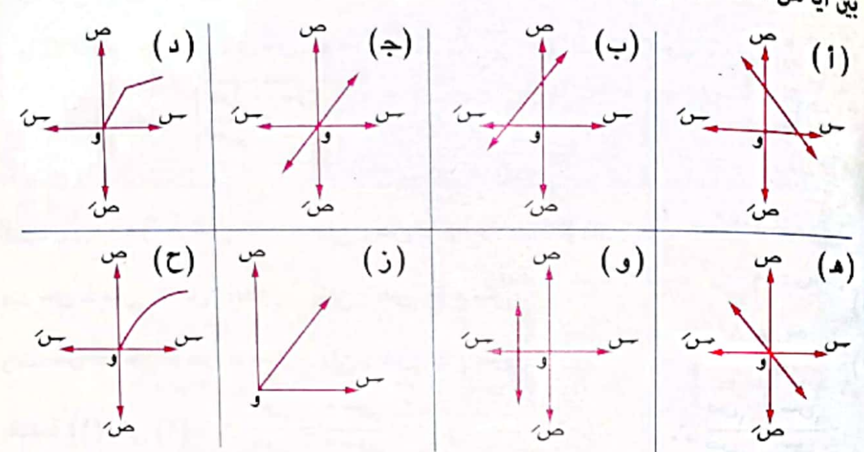
والجدول التالى يوضح بعض قيم ل وقيم ح المناظرة لها

طول الضلع (ل)	١	٣	٤
المحيط (ح)	٤	١٢	١٦

والشكل المقابل يمثل بيانيًا العلاقة بين ح ، ل

مثال ١

بيّن أيًا من الأشكال البيانية الآتية يمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص :



الحل

الأشكال البيانية التى تمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص هى (جـ) ، (هـ) ، (ز)

لأن كلًا منها عبارة عن مستقيم يمر بنقطة الأصل.

مثال ٢

إذا كان: $أ^٢ + ٤ ب^٢ = ٤ أ ب$ فأثبت أن: $أ \propto ب$

الحل

لإثبات أن: $أ \propto ب$ نثبت أن: $أ = م ب$ بحيث م ثابت ≠ ٠

∵ $أ^٢ + ٤ ب^٢ = ٤ أ ب$ ∴ $أ^٢ - ٤ أ ب + ٤ ب^٢ = ٠$ ∴ $(أ - ٢ ب)^٢ = ٠$

∴ $أ - ٢ ب = ٠$ ∴ $أ = ٢ ب$ ∴ $أ \propto ب$

حاول بنفسك ١

إذا كان: $\frac{٣ س - ٥ ص}{٣ س - ٩ ص} = \frac{١}{٢}$ لجميع قيم س ∈ ح+ ، ص ∈ ح+ أثبت أن: $س \propto ص$

خاصية

إذا كان: ص $\propto$ س

وأخذ المتغير س القيمتين س_1 ، س_2 وأخذ المتغير ص القيمتين ص_1 ، ص_2

على الترتيب فإن: $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$

السبب: ∵ ص $\propto$ س فإن: ص = م س حيث م ثابت ≠ ٠ .

عند س = س_1 ، ص = ص_1 فإن: $\text{ص}_1 = \text{م}\,\text{س}_1$ (١)

وعند س = س_2 ، ص = ص_2 فإن: $\text{ص}_2 = \text{م}\,\text{س}_2$ (٢)

بقسمة (١) على (٢): ∴ $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{م}\,\text{س}_1}{\text{م}\,\text{س}_2}$ ∴ $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$

مثال ٣

إذا كانت: ص $\propto$ س وكانت: ص = ٢٠ عند س = ٧ **فأوجد:** ص عندما س = ١٤

الحل

∵ ص $\propto$ س ∴ $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2}$

حيث: ص_1 = ٢٠ ، س_1 = ٧ ، ص_2 = ؟ ، س_2 = ١٤

∴ $\frac{٢٠}{\text{ص}_2} = \frac{٧}{١٤}$ ∴ $\text{ص}_2 = \frac{٢٠ \times ١٤}{٧} = ٤٠$

حل آخر: ∵ ص $\propto$ س ∴ ص = م س حيث م ثابت ≠ صفر

∵ ص = ٢٠ عندما س = ٧ ∴ ٢٠ = م × ٧

∴ م = $\frac{٢٠}{٧}$ ∴ ص = $\frac{٢٠}{٧}$ × س

وعندما س = ١٤ ∴ ص = $\frac{٢٠}{٧}$ × ١٤

∴ ص = ٤٠

مثال ٤

إذا كان س ، ص متغيرين حيث ص $\propto$ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{١}{\text{س}^٣}$

وأخذت ص القيمة ١٨ عندما أخذت س القيمة ٢

فأوجد العلاقة بين: س ، ص ثم أوجد قيم: ص عندما س ∈ {٠ ، ١ ، ٤}

الحل

∵ ص $\propto$ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{١}{\text{س}^٣}$ ∴ ص $\propto \text{س}^٣$

∴ ص = م $\text{س}^٣$ حيث م ثابت ≠ صفر

∵ ص = ١٨ عندما س = ٢ ∴ ١٨ = م × $(٢)^٣$

∴ م = $\frac{١٨}{٨} = \frac{٩}{٤}$ ∴ ص = $\frac{٩}{٤}\text{س}^٣$ هي العلاقة بين س ، ص

، عندما س = ٠ ∴ ص = $\frac{٩}{٤}$ × ٠ = ٠ ، عندما س = ١

∴ ص = $\frac{٩}{٤}$ × ١ = $\frac{٩}{٤}$ = ٢ $\frac{١}{٤}$ ، عندما س = ٤ ∴ ص = $\frac{٩}{٤}$ × ٦٤ = ١٤٤

مثال ٥

إذا كان (ح) يرمز لحجم مخروط دائرى قائم ارتفاعه ثابت وكان (ح) يتغير بتغير مربع طول نصف قطر قاعدة المخروط (نق) وكان حجم المخروط ٤٧٧ سم³ عندما كان طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم فأوجد حجم المخروط عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم

الحل

∵ ح $\propto$ نق^2 ∴ $\frac{\text{ح}_1}{\text{ح}_2} = \frac{\text{نق}_1^2}{\text{نق}_2^2}$ ∴ $\frac{\text{ح}_1}{\text{ح}_2} = \left(\frac{\text{نق}_1}{\text{نق}_2}\right)^2$

حيث: ح_1 = ٤٧٧ سم³ ، نق_1 = ١٥ سم ، ح_2 = ؟ ، نق_2 = ١٠ سم

∴ $\frac{٤٧٧}{\text{ح}_2} = \left(\frac{١٥}{١٠}\right)^2 = \frac{٩}{٤}$ ∴ $\text{ح}_2 = \frac{٤٧٧ \times ٤}{٩} = ٢١٢$ سم³

حاول بنفسك ٢

إذا كانت: س $\propto$ ص وكانت ص = ٢ عندما س = ٤٠ **فأوجد قيمة:** س عندما ص = ٣

ثانيًا التغير العكسى

تعريف

يقال إن ص تتغير عكسيًا مع س وتكتب $ص \propto \frac{1}{س}$

إذا كانت $ص = \frac{م}{س}$ (أى : س ص = م) حيث م ثابت ≠ صفر

فمثلًا : السرعة المنتظمة (ع) تتغير عكسيًا مع الزمن (ن) بفرض ثبوت المسافة المقطوعة لأن :

$ع = \frac{ف}{ن}$ ، أ ع ن = ف

وفى هذه الحالة نقول أن السرعة تتغير طرديًا بتغير المعكوس الضربى للزمن (ن) فنكتب :

$ع \propto \frac{1}{ن}$

مثال ٦

إذا كان : $أ^{2} ب^{4} - ١٠ أ ب^{2} = -٢٥$ فاثبت أن : أ تتناسب عكسيًا مع $ب^{2}$

الحل

لإثبات أن : أ تتناسب عكسيًا مع $ب^{2}$ نثبت أن : $أ ب^{2} = م$ حيث م ثابت ≠ صفر

∵ $أ^{2} ب^{4} - ١٠ أ ب^{2} = -٢٥$ ∴ $أ^{2} ب^{4} - ١٠ أ ب^{2} + ٢٥ = ٠$

∴ $(أ ب^{2} - ٥)^{2} = ٠$ ∴ $أ ب^{2} - ٥ = ٠$

∴ $أ ب^{2} = ٥$ ∴ أ تتناسب عكسيًا مع $ب^{2}$

حاول بنفسك ٣

إذا كان : $أ^{2} ب^{2} + ٤٩ = ١٤ أ ب$ فاثبت أن : $أ \propto \frac{1}{ب}$

خاصية

إذا كان : $ص \propto \frac{1}{س}$

وأخذ المتغير س القيمتين $س_{1}$ ، $س_{2}$ وتبعًا لذلك أخذ المتغير ص القيمتين $ص_{1}$ ، $ص_{2}$

على الترتيب فإن : $\frac{ص_{1}}{ص_{2}} = \frac{س_{2}}{س_{1}}$

السبب : ∵ $ص \propto \frac{1}{س}$ فإن : $ص = \frac{م}{س}$ حيث م ثابت ≠ ٠

عند $س = س_{1}$ ، $ص = ص_{1}$ فإن : $ص_{1} = \frac{م}{س_{1}}$ (١)

وعند $س = س_{2}$ ، $ص = ص_{2}$ فإن : $ص_{2} = \frac{م}{س_{2}}$ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{ص_{1}}{ص_{2}} = \frac{م}{س_{1}} \div \frac{م}{س_{2}} = \frac{م}{س_{1}} \times \frac{س_{2}}{م} = \frac{س_{2}}{س_{1}}$

مثال ٧

إذا كان طول مستطيل (ل) يتغير عكسيًا بتغير عرضه (ع) بفرض ثبوت مساحة المستطيل ، وكانت ل = ١٢ سم عندما ع = ٨ سم فأوجد قيمة : ل عندما ع = ٣ سم

الحل

∵ $ل \propto \frac{1}{ع}$

∴ $\frac{ل_{1}}{ل_{2}} = \frac{ع_{2}}{ع_{1}}$ حيث $ل_{1} = ١٢$ سم ، $ع_{1} = ٨$ سم ، $ل_{2} = ؟$ ، $ع_{2} = ٣$ سم

∴ $\frac{١٢}{ل_{2}} = \frac{٣}{٨}$ ∴ $ل_{2} = \frac{١٢ \times ٨}{٣} = ٣٢$ سم

حل آخر :

∵ ل ∝ $\frac{1}{\text{ع}}$ ∴ ل ع = م حيث م ثابت ≠ .

، ∵ ل = ١٢ عندما ع = ٨ ∴ م = ١٢ × ٨ = ٩٦

∴ ل ع = ٩٦ ، عندما ع = ٣ سم

∴ ٣ ل = ٩٦ ∴ ل = $\frac{٩٦}{٣}$ = ٣٢ سم

مثال ٨

إذا كانت ص تتغير عكسيًا بتغير س وكانت ص = ٦ عندما س = ٢,٥

فأوجد العلاقة بين : س ، ص ثم أوجد قيمة : ص عندما س = ٥

الحل

∵ ص ∝ $\frac{1}{\text{س}}$ ∴ س ص = م حيث م ثابت ≠ .

، ∵ ص = ٦ عندما س = ٢,٥ ∴ م = ٦ × ٢,٥ = ١٥

∴ العلاقة بين س ، ص هي : س ص = ١٥

، عندما س = ٥ ∴ ٥ ص = ١٥ ∴ ص = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣

مثال ٩

إذا كانت : ص = ١ + ب حيث ب تتغير عكسيًا مع س^2 وكانت ص = ١٧ عندما س = $\frac{1}{2}$

أوجد العلاقة بين : س ، ص ثم أوجد قيمة ص : عندما س = ٢

الحل

∵ ب تتغير عكسيًا مع س^2 ∴ ب = $\frac{\text{م}}{\text{س}^2}$ حيث م ثابت ≠ .

∴ ص = ١ + $\frac{\text{م}}{\text{س}^2}$

، ∵ ص = ١٧ عندما س = $\frac{1}{2}$ ∴ ١٧ = ١ + $\frac{\text{م}}{(\frac{1}{2})^2}$

∴ ١٧ = ١ + $\frac{\text{م}}{\frac{1}{4}}$ وبطرح ١ من الطرفين ∴ ١٦ = $\frac{\text{م}}{\frac{1}{4}}$

∴ م = ١٦ × $\frac{1}{4}$ = ٤ ∴ ص = ١ + $\frac{٤}{\text{س}^2}$

، عندما س = ٢ :

∴ ص = ١ + $\frac{٤}{٢^2}$ = ١ + $\frac{٤}{٤}$ = ٢

حاول بنفسك ٤

إذا كانت ص تتناسب عكسيًا مع س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦

احسب قيمة : ص عندما س = ١

تمارين 8

على التغير الطردى والتغير العكسى

اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

1 أكمل ما يأتى :

1 إذا كانت : س ∝ ص فإن : س = ...

2 إذا كانت : ع = $\frac{م}{س^2}$ حيث م ثابت ≠ ٠ فإن : ع ∝ ....

3 إذا كانت : ص ∝ س فإن : $\frac{س_1}{س_2}$ = $\frac{..........}{..........}$ (الوادى الجديد ١١)

4 إذا كانت : س تتغير عكسيًا مع ص فإن : $\frac{ص_1}{ص_2}$ = $\frac{..........}{..........}$ (قنا ١١)

5 إذا كانت : ص = $\frac{3}{5}$ س فإن : ص ∝ .... (أسوان ٠٨)

6 إذا كانت : ص ∝ $\frac{5}{س}$ فإن : ص تتغير عكسيًا مع .... (الإسماعيلية ٠٩)

7 إذا كانت : س − ٢ ص = ٠ فإن : س ∝ .... (الدقهلية ٠٩)

8 إذا كان : ٢ س ص = ٥ فإن : س ∝ .... (الشرقية ٠٩)

9 إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٨

فإن : ص = ... عندما س = ١٢ (الشرقية ١١)

10 إذا كانت : ص ∝ $\frac{1}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٢٠

فإنه عندما س = ١٢ فإن : ص = ... (البحيرة ١٢)

11 إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فإن : ص = ... س

12 إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٤

فإن : $\frac{ص}{س}$ = ... (فى أبسط صورة)

13 إذا كانت : ث = $\frac{م ك}{ح}$ حيث م ثابت ≠ ٠

فإن : ث تتغير .... مع ك عند ثبوت ح

، ث تتغير .... مع ح عند ثبوت ك

2 إذا كانت : ص تتغير طرديًا مع س ، وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧

فأوجد : س عندما ص = ٤٠

١٢ إذا كانت : ص ∝ (س + ١) وكانت : س = ٣ عندما ص = ٢

فأوجد العلاقة بين : س ، ص (مطروح ٠٩) «ص = $\frac{1}{2}$ (س + ١)»

١٣ إذا كان : $\frac{٥ س - ٣ ص}{٣ س + ٥ ص} = ١$ لجميع قيم س ∈ ع+ ، ص ∈ ع+ فأثبت أن : ص ∝ س

١٤ إذا كان : $\frac{أ + ٢ ب}{٦} = \frac{ب + ٣ حـ}{٣}$ فأثبت أن : أ ∝ حـ (الفيوم ١٧)

١٥ 📖 إذا كان : $\frac{٢١ س - ص}{٧ س - ع} = \frac{ص}{ع}$ فأثبت أن : ص ∝ ع (دمياط ١٩ ، القليوبية ١٨ ، القاهرة ١٥)

١٦ إذا كانت : $س^٢ ص^٢ - ٦ س ص + ٩ = ٠$

فأثبت أن : ص تتغير عكسيًا مع س (ج. سيناء ١٤ ، دمياط ١٣)

١٧ إذا كان : $٤ أ^٢ + ٩ ب^٢ = ١٢ أ ب$ أثبت أن : أ تتغير طرديًا بتغير ب (مطروح ١٧)

١٨ 📖 إذا كان : $س^٤ ص^٢ - ١٤ س^٢ ص + ٤٩ = ٠$. فأثبت أن : ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ (الإسكندرية ١٩)

١٩ إذا كان : (٤ س + ٧ ص) ∝ (س + ٢ ص) حيث س ∈ ع ، ص ∈ ع

فأثبت أن : ص ∝ س

٢٠ إذا كان : $\left(\frac{أ}{ص} - \frac{أ}{س}\right)$ ∝ س - ص حيث أ ثابت ، س ≠ ص ≠ ٠ .

فأثبت أن : س تتغير عكسيًا مع ص

٢١ 📖 بيّن أيًا من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا ، وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا ، وأيها لا يمثل تغيرًا طرديًا أو عكسيًا مع ذكر السبب في كل حالة :

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢
٤	١٥
٦	١٠

س	ص
٢	٩
٤	١٨
١٢	٥٤
١٦	٧٢

س	ص
٥	٩
١٠	١٨
١٥	٢٧
٢٥	٤٥

س	ص
٣	٦
٢-	٩-
١٨-	١
٩	٢-

٢٢ من بيانات الجدول المقابل

أجب عن الأسئلة الآتية :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

[١] بيِّن نوع التغير بين ص ، س

[٢] أوجد ثابت التناسب. (الإسماعيلية ١٨ ، دمياط ١٦)

[٣] أوجد قيمة ص عندما س = ٣

[٤] أوجد قيمة س عندما ص = $\frac{٢}{٥}$ ٢ «١٢ ، ٤ ، ٥»

٢٣ في الجدول المقابل :

س	١	٢	ب	٤	٦
ص	١٢	أ	٣٦	٤٨	٧٢

[١] بيِّن نوع التغير بين : ص ، س

[٢] أوجد قيمتى : أ ، ب

«أ = ٢٤ ، ب = ٣»

٢٤ إذا كانت : ص = ع + ٥ ، وكانت ع تتغير عكسيًا مع س ، وكانت ص = ٦ عندما س = ٢

فأوجد العلاقة بين : س ، ص ثم أوجد : ص عندما س = ١

(المنوفية ١٧) «ص = $\frac{٢}{س}$ + ٥ ، ٧»

٢٥ إذا كانت : ص = أ + ب حيث أ ثابت ، ب تتغير طرديًا بتغير س

وكانت : ص = ٣ عندما س = ٠ ، ص = ٥ عندما س = ٣

[١] أوجد العلاقة بين : س ، ص

[٢] أوجد : قيمة ص عندما س = ٧

«ص = ٣ + $\frac{٢}{٣}$ س ، $\frac{٢}{٣}$ ٧»

٢٦ إذا كانت : ص = أ − ٩ وكانت ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ وكانت أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

فأوجد العلاقة بين : ص ، س ثم استنتج قيمة : ص عندما س = ١

(الأقصر ١٩ ، كفر الشيخ ١٨ ، السويس ١٨) «ص = $\frac{٤}{س^{٢}}$ ، ٤»

٢٧ إذا كانت : ص = ٢ + أ وكانت أ تتغير عكسيًا مع س وكانت أ = ٥ عندما س = ٢

أوجد : [١] العلاقة بين ص ، س

[٢] قيمة ص عندما س = ٥ (الشرقية ١٧)

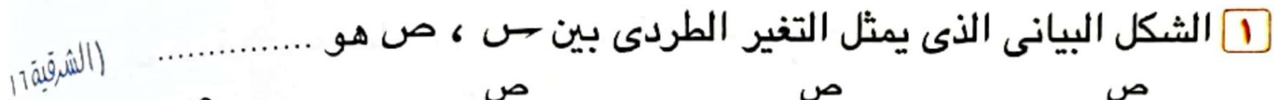
«ص = ٢ + $\frac{١٠}{س}$ ، ٤»

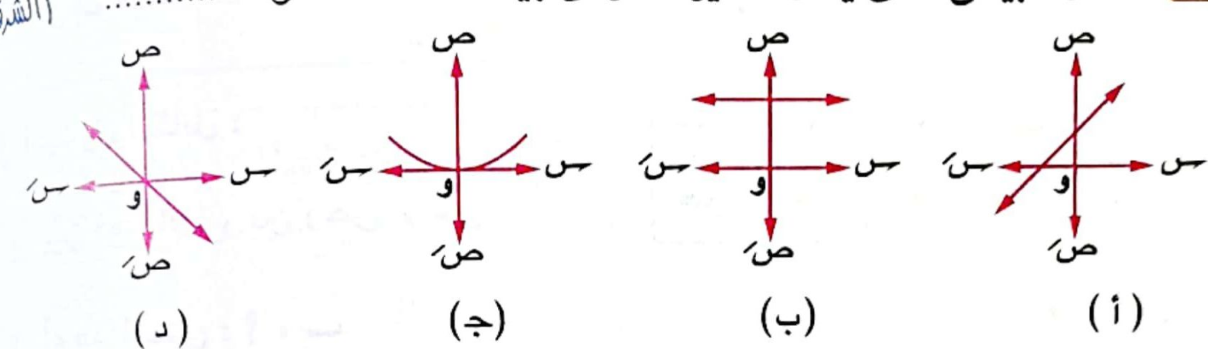
٢٨ إذا كانت : س = ل + ٩ وكانت ل $\propto$ ص **فأوجد العلاقة بين : ل ، ص**

علمًا بأن س = ٢٤ عندما ص = ٥ **ثم أوجد قيمة :** ص عندما ل = ١٢ «ل = ٣ ص ، ٤»

٢٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الشكل البيانى الذى يمثل التغير الطردى بين س ، ص هو .... (الشرقية ١٦)





٢ العلاقة التى تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص ، س هى .... (سوهاج ٢٠)

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٤}{\text{ص}}$ (د) $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٢}$

٣ أى العلاقات التالية تمثل تغيرًا عكسيًا بين المتغيرين س ، ص ؟ (البحيرة ١٥)

(أ) ص = س + ٥ (ب) ص = ٤ س (جـ) $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٥}{٧}$ (د) س ص = ١١

٤ إذا كانت : ص تتغير عكسيًا مع $\text{س}^{٢}$ ، ك ثابت التناسب فإن : ....

(أ) ص = ك $\text{س}^{٢}$ (ب) ص = ك − $\text{س}^{٢}$

(جـ) ص = $\frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}}$ (د) ص = $\frac{\text{ك}}{\text{س}}$

٥ إذا كانت : س ، ص كميتين متغيرتين وكان : $\frac{\text{س}_{١}\text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢}\text{ص}_{٢}} = ١$

فإن : ص $\propto$ ....

(أ) س (ب) $\frac{١}{\text{س}}$ (جـ) $\text{س}^{٢}$ (د) $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$

٦ إذا كانت : ص $\propto$ س وكانت ص = ٥ عندما س = ٣ فإن ثابت التغير = ...

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) $\frac{٥}{٣}$

٧ إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

فإن ثابت التناسب يساوى .... (الوادى الجديد ٢٠ ، البحيرة ١٦ ، بنى سويف ١٥)

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٦

٨) إذا كان : $س ص^{٥}$ = ثابت فإن : س تتغير عكسيًا مع .... (الإسماعيلية ٠٨)

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $ص^{٥}$ (جـ) ص (د) $ص^{٢}$

٩) إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{\sqrt{س}}$ فإن : س تتناسب .... (مطروح ٠٩)

(أ) طرديًا مع $ص^{٢}$ (ب) عكسيًا مع $ص^{٢}$

(جـ) عكسيًا مع ص (د) عكسيًا مع $\sqrt{ص}$

١٠) إذا كانت : $ص^{٢} + ٤ س^{٢} = ٤ س ص$ فإن : .... (ج.سيناء ١٩، الإسكندرية ١٥)

(أ) ص ∝ س (ب) ص ∝ $س^{٢}$ (جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (د) ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

١١) إذا كانت : $س^{٢} ص^{٢} + \frac{١}{٤} = س ص$ فإن : .... (المنوفية ١٦)

(أ) س ∝ ص (ب) ص ∝ س (جـ) ٢ س ∝ ٥ ص (د) ص ∝ $\frac{١}{س}$

١٢) إذا كانت : ص = ٣ س − ٦ فإن : ص ∝ .... (الشرقية ١٤)

(أ) س (ب) ٣ س (جـ) س − ٢ (د) ٣ س − ٦

١٣) إذا كانت : $\frac{ص + ٣}{ص} = \frac{س + ٢}{س}$ حيث س ≠ ص ≠ ٠

فإن : ص ∝ .... (الإسماعيلية ١٤)

(أ) س (ب) $\frac{١}{س}$ (جـ) س + ٢ (د) س + ٥

١٤) إذا كان : ص − س = $\frac{٢}{س} - \frac{٢}{ص}$ حيث س ≠ ص ≠ ٠ فإن : ....

(أ) ص ∝ س + ١ (ب) ص ∝ س (جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (د) ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$

١٥) 📖 إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) والآخر يتناسب طرديًا مع عدد المشتركين (س) فإن : .... (الإسماعيلية ١١)

(أ) ص = أ س (ب) ص = $\frac{أ}{س}$

(جـ) ص = أ + $\frac{م}{س}$ (م ثابت ≠ ٠) (د) ص = أ + م س (م ثابت ≠ ٠)

تطبيق هندسى

٣٠ إذا كان (ع) ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة (حجمها ثابت) يتغير عكسيًا بتغير مربع

طول نصف قطر قاعدتها (نق) ، وكان ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم

فأوجد : ع عندما نق = ١٥,٧٥ سم

(بورسعيد ٢٠) «١٢

تطبيقات حياتية

٣١ تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طرديًا مع الزمن ، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلو مترًا فى ٦ ساعات

، فكم كيلو مترًا تقطعها السيارة فى ١٠ ساعات ؟



(القليوبية ١٣) «٢٥٠ ك

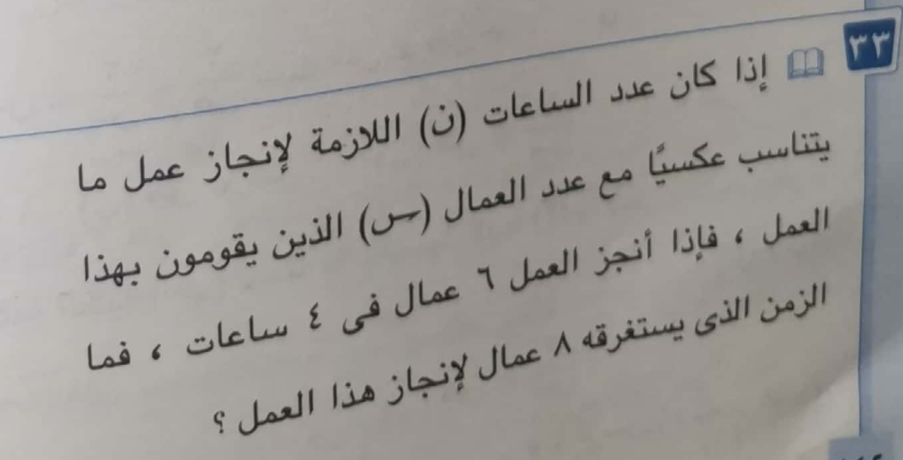
٣٢ إذا كان وزن جسم على القمر (و) يتناسب طرديًا مع وزنه على الأرض (ر) ، وكان الجسم يزن ٨٤ كيلو جرامًا على الأرض ، ووزنه ١٤ كيلو جرامًا على القمر ،

فكم يكون وزن الجسم على القمر إذا كان وزنه على الأرض ١٤٤ كيلو جرامًا ؟



«٢٤ كيلو جرامًا

٣٣ إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما



يتناسب عكسيًا مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦ عمال فى ٤ ساعات ، فما الزمن الذى يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل ؟





٣٤ إذا كانت المسافة التى تقطعها دراجة بخارية (ف)
تتغير طرديًا بتغير مربع الزمن (ن)
وكانت ف = $\frac{٨١}{١٦}$ كم عندما ن = $\frac{١}{٤}$ ساعة
فأوجد : قيمة ن عندما ف = ١٤٤ كم

(أسيوط ١٢) «$١\frac{١}{٢}$ ساعة»



٣٥ إذا كان مقدار السرعة ع التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسيًا بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٥ سم/ث عندما نق = ٣ سم
أوجد : ع عندما نق = ٢,٥ سم

«٧,٢ سم/ ث»



٣٦ إذا كان وزن جسم يتغير عكسيًا مع مربع بعده عن مركز الأرض وأطلق قمر صناعى يزن ٥٠٠ ثقل كجم فكم يزن عندما يكون على ارتفاع ٦٤٠ كم عن سطح الأرض مقربًا لأقرب ثقل كجم ؟ (اعتبر طول نصف قطر الأرض ٦٣٩٠ كيلو مترًا)

«٤١٣ ثقل كجم»



٣٧ إذا كانت : س $\propto$ ص ، ع $\propto$ ل
فأثبت أن : (س + ص) (ع + ل) $\propto$ (س − ص) (ع − ل)

٣٨ إذا كانت : (أ + ب) $\propto \frac{أ}{ب}$ ، (أ^{٢} − أ ب + ب^{٢}) $\propto \frac{ب}{أ}$
فأثبت أن : أ^{٣} + ب^{٣} = مقدار ثابت.



ملخص الوحدة الثانية

النسبة

- قيمة النسبة لا تتغير إذا ضُرب حداها فى (أو قُسما على) عدد حقيقى لا يساوى الصفر.
- قيمة النسبة (≠ ١) تتغير إذا أضيف إلى حديها (أو طرح منهما) عدد حقيقى لا يساوى الصفر.
- إذا كانت النسبة بين عددين هى أ : ب

  فإن: **العدد الأول = أ م** ، **العدد الثانى = ب م** حيث: $م \in ع^*$

التناسب

- إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$ فإن: أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة.
- إذا كانت: أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$
- إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$ فإن: **$أ \times ء = ب \times ح$**

  أى أن: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.
- إذا كان: $أ \times ء = ب \times ح$

  فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$ ، $\frac{أ}{ح} = \frac{ب}{ء}$ ، $\frac{ء}{ب} = \frac{ح}{أ}$ ، $\frac{ء}{ح} = \frac{ب}{أ}$
- إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$ فإن: $\frac{أ}{ح} = \frac{ب}{ء}$

  أى أن: $\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالى النسبة الأولى}}{\text{تالى النسبة الثانية}}$
- إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$ فإن: $أ = ح م$ ، $ب = ء م$ حيث م ثابت ≠ صفر
- إذا كانت: أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة وفرضنا أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = م$

  فإن: $أ = ب م$ ، $ح = ء م$
- إذا كانت: $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و} = \dots$ وكانت $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، ... أعدادًا حقيقية لا تساوى الصفر

  فإن: $\frac{م_1 أ + م_2 ح + م_3 هـ + \dots}{م_1 ب + م_2 ء + م_3 و + \dots}$ = إحدى النسب.
- يقال إن الكميات أ ، ب ، ح فى تناسب متسلسل إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح}$

  يسمى أ الأول المتناسب ، ح الثالث المتناسب ، أما ب فتسمى الوسط المتناسب بين أ ، ح

  ويكون: $ب^2 = أ ح$ أى: $ب = \pm\sqrt{أ ح}$
- إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{ء} = م$ فإن: $ح = ء م$ ، $ب = ء م^2$ ، $أ = ء م^3$

التغير الطردى والتغير العكسى

التغير الطردى

- إذا كانت: ص تتغير طرديًا مع س

  وتكتب ص ∝ س فإن:

  (١) ص = م س (أى أن: $\frac{ص}{س} = م$)

  حيث م ثابت ≠ ٠

  (٢) $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

  (٣) العلاقة بين س ، ص يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بنقطة الأصل.
- لإثبات أن ص ∝ س نثبت أن:

  ص = م س حيث م ثابت ≠ ٠

التغير العكسى

- إذا كانت: ص تتغير عكسيًا مع س

  وتكتب ص ∝ $\frac{1}{س}$ فإن:

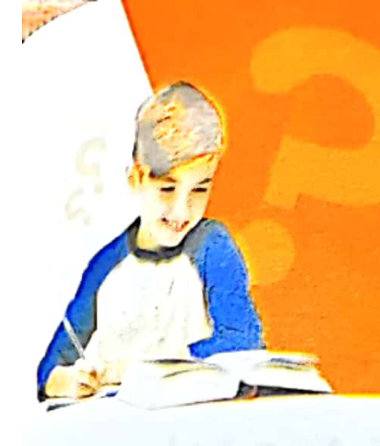
  (١) ص = $\frac{م}{س}$ (أى أن: س ص = م)

  حيث م ثابت ≠ ٠

  (٢) $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_2}{س_1}$

  (٣) العلاقة بين س ، ص ليست علاقة خطية.
- لإثبات أن ص ∝ $\frac{1}{س}$ نثبت أن:

  س ص = م حيث م ثابت ≠ ٠



امتحانات على الوحدة الثانية

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : ٤ $س^٢$ = ٩ $ص^٢$ فإن : $\frac{س}{ص}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\pm\frac{٣}{٢}$ (د) $\pm\frac{٢}{٣}$

٢ إذا كانت : $س^٢$ ص = ٥ فإن : ....

(أ) ص ∝ س (ب) ص ∝ $س^٢$ (جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (د) ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$

٣ إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣}$ فإن : $\frac{ب - أ}{ب + أ}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

٤ إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{٤ س - ٢ ص}{ع}$ فإن : ع = ...

(أ) −٢ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

٥ الثانى المتناسب للكميات : ١٢ أ $ب^٢$ ، ... ، ٢١ أ ب ، ١٤ $ب^٢$ هو ....

(أ) ٨ أ $ب^٢$ (ب) ٨ $ب^٢$ (جـ) ٢٤ أ ب (د) ٢٤ $ب^٤$

٦ إذا كانت : ص ∝ س ، وكانت س = ١ عندما ص = ٤ فإن ثابت التناسب = ...

(أ) ١ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) $-\frac{١}{٤}$

٢ (أ) إذا كان : $\frac{أ}{٤} = \frac{ب}{٣}$ أوجد قيمة : $\frac{أ ب + أ^٢}{أ ب - ب^٢}$

(ب) إذا كانت : ب وسطًا متناسبًا بين أ ، حـ

فأثبت أن : $\sqrt{\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + حـ^٢}} = \frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ، حـ كميات موجبة.

٣ (أ) إذا كانت : ص تتغير عكسيًا مع $س^٢$ وكانت : س = ٣ عندما ص = ٤

فأوجد : **١** العلاقة بين ص ، س **٢** قيمة س عندما ص = ٩

(ب) إذا كانت : أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة فأثبت أن : $\frac{أ + ٢ ح}{ب + ٢ ء} = \frac{ح - أ}{ء - ب}$

٤ (أ) إذا كان : $\frac{أ}{س + ص} = \frac{ب}{ص - ٢ س} = \frac{ح}{س + ٤ ص}$ أوجد قيمة : $\frac{ب + ٢ ح}{٢ أ + ب}$

(ب) إذا كانت : ص = ٣ + أ وكانت أ ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١

فأوجد العلاقة بين : س ، ص ثم أوجد : ص عندما س = ٢

٥ (أ) إذا كان : أ ، ب ، ح ، ء فى تناسب متسلسل فأثبت أن : $\frac{٢ أ^٢ + ٣ ب^٢}{٢ أ + ٣ ء} = أ^٢$

(ب) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى مقدم النسبة ٢٩ : ٤٦ وطرح مربعه من تاليها فإننا نحصل على النسبة ٣ : ٢

النموذج الثانى

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ إذا كانت : أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن : $\frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٢

٢ إذا كانت : ٢ ، ٦ ، س + ١٥ متناسبة فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ إذا كان : س ص = ١٢ فإن : ص تتغير طرديًا مع ....

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) س − ١٢ (جـ) س (د) س + ١٢

٤ إذا كانت : ص تتناسب عكسيًا مع س وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

فإن ثابت التناسب = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٦

٥ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء} = \frac{هـ}{و} = م$ (حيث م ∈ ع*) فإن : $\frac{أ ح هـ}{ب ء و} = $ ....

(أ) م (ب) ٣ م (جـ) $م^٣$ (د) ٣ $م^٣$

٦ إذا كان : $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥}$ فإن : ٥ أ − ٣ ب + ٧ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٧ (د) ٥ أ ب

٢ (أ) إذا كانت : $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{ح}{ء - ح}$ فأثبت أن : أ ، ب ، ح ، ء متناسبة.

(ب) إذا كانت : ص = أ − ١ وكانت أ تتغير عكسيًا مع $س^٢$ وكان : أ = ٤ عندما س = ٢

أوجد : ١ العلاقة بين : ص ، س ٢ قيمة س عندما ص = ٨

٣ (أ) إذا كان : $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٣} = \frac{ع + س}{٦}$ أثبت أن : $\frac{س - ع}{٢} = \frac{س + ص + ع}{٧}$

(ب) إذا كانت : أ ، ب ، ح ، ء كميات متناسبة أثبت أن : $\frac{٢ أ + ٣ ب}{٢ ح + ٣ ء} = \frac{أ}{ح}$

٤ (أ) إذا كانت : ٥ أ = ٣ ب أوجد قيمة : $\frac{٧ أ + ٩ ب}{٤ أ + ٢ ب}$

(ب) إذا كانت : ب وسطًا متناسبًا بين أ ، ح أثبت أن : $\frac{أ - ب}{أ - ح} = \frac{ب}{ب + ح}$

٥ (أ) إذا كانت : ٤ $س^٢$ + $ص^٢$ = ٤ س ص

١ أثبت أن : ص ∝ س ٢ أوجد قيمة : س عندما ص = ٨

(ب) إذا كان أ : ب : ح = ٤ : ٥ : ٣ أثبت أن : $\frac{أ - ب + ح}{أ + ب - ح} = \frac{١}{٣}$



مشروع بحثى

على الوحدة الثانية



أهداف المشروع

- استخدام خواص النسبة والتناسب لحل المشكلات.
- التمييز بين التغير الطردى والتغير العكسى.
- استخدام الرياضيات فى حل المشكلات الحياتية.
- الربط بين الرياضيات والدراسات الاجتماعية.
- الربط بين الرياضيات والعلوم.

المطلوب

« يعتبر مقياس الرسم من أهم عناصر الخريطة، وهو أحد تطبيقات النسبة والتناسب »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- عرف مقياس الرسم وتكلم عن أهميته.
- الصق خريطة لمصر موضحًا عليها مقياس الرسم.
- حدد محافظتين على هذه الخريطة ثم قِس المسافة بينهما ، وباستخدام مقياس الرسم الموضح على الخريطة احسب المسافة الحقيقية بين هاتين المحافظتين.
- ابحث عن قانون حساب السرعة المنتظمة ، ثم احسب الزمن الذى تستغرقه سيارة تسير بسرعة منتظمة ١٢٠ كم/س لقطع المسافة بين هاتين المحافظتين.
- ما نوع التغير بين المسافة والزمن بفرض ثبوت السرعة ؟



الدرس 1

جمع البيانات

يقوم الباحث الإحصائى بجمع البيانات وتبويبها وتمثيلها بيانيًا وتحليلها بغرض الوصول إلى نتائج تؤخذ فى ضوئها القرارات المناسبة أى أنه بقدر دقة البيانات تكون دقة النتائج وسلامة القرارات لذلك فإنه يجب اتباع أسلوب علمى صحيح فى جمع البيانات ، وجمع البيانات الإحصائية يتطلب معرفة مصادر جمع هذه البيانات وتحديد أسلوب جمعها.

مصادر جمع البيانات

تنقسم مصادر جمع البيانات إلى :

١ مصادر أولية (ميدانية) :

وهى المصادر التى يحصل منها الباحث على البيانات بشكل مباشر.

٢ مصادر ثانوية (تاريخية) :

وهى المصادر التى يحصل منها الباحث على البيانات التى تم تجميعها وتسجيلها من قبل بواسطة بعض الهيئات أو المؤسسات أو الأشخاص.



فيما يلى بعض الأمثلة لكل منهما مع استعراض مميزات وعيوب كل مصدر :

	١ المصادر الأولية (الميدانية)	٢ المصادر الثانوية (التاريخية)
أمثلة	• المقابلة الشخصية. • الاستبيانات واستطلاعات الرأى. • الملاحظة والقياس.	• نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء. • قاعدة بيانات الموظفين بإحدى الشركات. • وسائل الإعلام ومواقع الإنترنت.
مميزاتها	الدقة.	توفير الوقت والجهد والمال.
عيوبها	تحتاج إلى وقت ومجهود وتكلفة كبيرة كما تحتاج إلى عدد كبير من الباحثين فى المجتمعات الكبيرة.	عدم الدقة أحيانًا لبعض المصادر.

أساليب جمع البيانات

يتوقف الأسلوب المستخدم فى جمع البيانات على الهدف المراد لأجله جمع هذه البيانات كما يتوقف على حجم المجتمع الإحصائى.

ويعرف المجتمع الإحصائى بأنه : جميع المفردات التى تجمعها خصائص عامة واحدة ، مثل :

- تلاميذ مدرسة ما تمثل مجتمعًا إحصائيًا تكون مفردته التلميذ.
- عمال مصنع ما تمثل مجتمعًا إحصائيًا تكون مفردته العامل.

وفيما يلى سوف نستعرض أسلوبين لجمع البيانات :

١ أسلوب الحصر الشامل :

ويقوم على جمع البيانات حول الظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى ، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع.

٢ أسلوب العينات :

ويقوم على جمع البيانات حول الظاهرة محل الدراسة من عينة ممثلة للمجتمع كله وإجراء البحث عليها ، ثم تعميم النتائج على المجتمع كله.

وفيما يلى بعض الأمثلة لكل أسلوب من الأسلوبين مع استعراض مميزات وعيوب كل منهما :

	١ أسلوب الحصر الشامل	٢ أسلوب العينات
أمثلة لاستخداماته	• الانتخابات. • التعداد العام للسكان. • عمل قاعدة بيانات للعاملين فى إحدى المؤسسات.	• عينة من دم مريض لإجراء بعض الفحوصات الطبية. • عينة من بعض منتجات مصنع لبحث مدى مطابقتها للمواصفات.
مميزاته	• الدقة. • الشمول. • عدم التحيز. • التمثيل التام لكل مفردات المجتمع الإحصائى.	• توفير الوقت والجهد والتكاليف. • الطريقة الوحيدة لجمع بيانات عن المجتمعات الكبيرة الغير محدودة (مثل بحث مكونات رمال الصحراء). • الطريقة الوحيدة لدراسة بعض المجتمعات المحدودة التى يؤدى فيها أسلوب الحصر الشامل إلى خسائر فادحة (مثل فحص دم مريض لأن فحص الدم كله يؤدى إلى الوفاة).
عيوبه	• يحتاج فى بعض الأحيان إلى وقت طويل وتكلفة باهظة.	• عدم دقة نتائجه فى بعض الحالات خاصة فى حالة أن تكون العينة المختارة غير ممثلة للمجتمع الإحصائى تمثيلًا صادقًا (عينة متحيزة).

وفيما يلى سوف نتعرض لمفهوم العينة وأنواعها وكيفية اختيارها :

مفهوم العينة

العينة هى جزء صغير من مجتمع كبير تشبه المجتمع وتمثله.

كيفية اختيار العينات

أنواع العينات عن طريق كيفية اختيارها

- الاختيار المتحيز
  عينة غير عشوائية او عمدية
- الاختيار العشوائي
  عينة عشوائية
  - عينة عشوائية بسيطة (فى حالة المجتمعات المتجانسة)
  - عينة عشوائية طبقية (فى حالة المجتمعات غير المتجانسة)

وفيما يلى نتطرق لكل نوع بشىء من التفصيل :

أولاً : الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية) :

وهو يعنى اختيار مفردات بعينها من مفردات المجتمع الإحصائى دون غيرها بحيث تناسب أهداف البحث وتُعرف بالعينة العمدية.

فمثلًا : عند دراسة مدى استيعاب تلاميذ مدرسة ما لموضوع ما فى مادة الجبر ، يجب أن نحلل نتائج الاختبار فى ذلك الموضوع باختيار تلاميذ سبق لهم دراسة الموضوع نفسه دون سائر التلاميذ ، ولا يعتبر هذا الاختيار عشوائيًا.

ثانيًا : الاختيار العشوائى (العينات العشوائية) :

وهو اختيار عينة من مفردات المجتمع الإحصائى بحيث تكون كل مفردة من مفردات المجتمع لها نفس الفرصة فى الاختيار، وفيما يلى أهم أنواع العينات العشوائية :

١ العينة العشوائية البسيطة. ٢ العينة العشوائية الطبقية.

١ العينة العشوائية البسيطة

وتستخدم مع المجتمعات المتجانسة الغير مقسمة بطبيعتها إلى فئات أو طبقات ، ويتم اختيارها بطريقتين حسب عدد مفردات المجتمع كما يلى :

(أ) **الطريقة الأولى (إذا كان حجم المجتمع صغيرًا) :** وتتم هذه الطريقة كما يلى :

١ تُعطى كل مفردة فى مجتمع الدراسة رقمًا ثم يكتب هذا الرقم فى قصاصة ورق بحيث تكون جميع القصاصات متماثلة أى لا تمييز فيها من حيث اللون أو المقاس.

٢ تُطوى كل قصاصة بطريقة متماثلة بحيث لا يظهر الرقم نهائيًا ثم توضع فى صندوق وتُخلط جيدًا.

٣ يتم اختيار العينة باختيار ورقة من الصندوق دون النظر داخله ثم تُقلَّب الأوراق جيدًا ونختار ورقة ثانية ، وهكذا حتى ننتهى من اختيار العدد المطلوب للعينة.

وتعتبر هذه الطريقة مناسبة مثلًا لاختيار عينة مكونة من ١٠ عمال فى مصنع به ٥٠ عاملًا.

(ب) الطريقة الثانية (إذا كان حجم المجتمع كبيرًا) :

يتم ترقيم جميع مفردات المجتمع ثم نختار العينة من هذه المفردات باستخدام خاصية الرقم العشوائى الموجود بالآلة الحاسبة العلمية مثل الموضحة بالصورة المقابلة ، ويتم ذلك بالضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار لليمين :





فيظهر رقم عشرى بين ٠,٠٠٠ ، ٠,٩٩٩ وفى حالة ظهور رقم عشرى واحد بعد العلامة نضيف صفرين لجعله جزءًا من ألف (٠,٢ ⟵ ٠,٢٠٠) وفى حالة ظهور رقمين عشريين بعد العلامة نضيف صفرًا على اليمين لجعله جزءًا من ألف (٠,٦٤ ⟵ ٠,٦٤٠) ثم نأخذ تلك الأرقام بعد تجاهل العلامة العشرية ونختار المفردة الممثلة لها ومع تكرار الضغط على مفتاح (=) يتوالى ظهور الأرقام وتُستبعد الأرقام الأكبر من عدد مجتمع الدراسة كما يتم استبعاد الأرقام التى تم اختيارها من قبل إلى أن نصل إلى عدد العينة الذى نريده وتعتبر نسبة ١٠٪ نسبة مناسبة لإجراء أى استبيان.

وتعتبر هذه الطريقة مناسبة لاختيار عينة مكونة من ٢٥ طالبًا من مدرسة بها ٩٠٠ طالب.



٢ العينة العشوائية الطبقية

وتستخدم فى حالة المجتمعات الإحصائية الغير متجانسة أى المقسمة بطبعها إلى مجموعات نوعية تختلف فى الصفات، وفى هذه الحالة لا نستطيع أن نختار العينة بطريقة العينة العشوائية البسيطة لأن ذلك قد يجعل العينة بها عدد أكبر من مفردات طبقات بعينها دون الأخرى مما يجعل العينة غير ممثلة لجميع طبقات مجتمع الدراسة ولذلك نقوم بالخطوات التالية :

١ نقسم مفردات المجتمع الإحصائى إلى طبقات تبعًا للصفات المكونة للمجتمع.

٢ نحصى عدد مفردات كل طبقة من هذه الطبقات ونوجد نسبتها إلى عدد مفردات المجتمع الكلى.

٣ لتكوين العينة فإننا نختار من كل طبقة عددًا معينًا من المفردات بحيث تكون النسبة التى تمثل كل طبقة فى العينة هى نفس نسبة الطبقة فى المجتمع الكلى ، وذلك باستخدام القانون التالى :

$$\text{عدد مفردات الطبقة فى العينة} = \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلى}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

«مقربًا الناتج لأقرب وحدة»

فمثلًا : عند دراسة المستوى الدراسى لطلاب مدرسة بها ٥٠٠ طالب وطالبة وكانت نسبة البنين إلى البنات ١ : ٤ وأردنا اختيار عينة مكونة من ٥٠ طالبًا فلابد من اختيار ١٠ طلاب من طبقة البنين و٤٠ طالبة من طبقة البنات لتكون العينة ممثلة لطبقات المجتمع محل الدراسة.

مثال ١

مصنع به ٣٠٠ عامل ويريد المسئولون عن إعداد المجلة الشهرية الخاصة بهذا المصنع تطوير هذه المجلة فى ضوء معرفة آراء العاملين من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يُعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠٪ من إجمالى عدد العاملين بهذا المصنع.
وضح كيف يتم اختيار هذه العينة باستخدام الآلة الحاسبة.

الحـل

∵ عدد العاملين بالمصنع = ٣٠٠ عامل

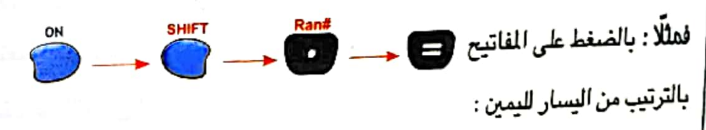
∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٠٠ = ٣٠ عاملاً

أى أننا نريد اختيار ٣٠ عاملاً لإجراء هذا الاستبيان ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية كالتالى :

١ يعطى كل عامل من العاملين بالمصنع رقمًا من ١ إلى ٣٠٠

٢ تُستخدم الآلة الحاسبة العلمية لاختيار ٣٠ رقمًا بالطريقة السابق ذكرها والتى تنحصر بين صفر ، ٣٠١ والأرقام العشوائية التى تظهر أكبر من ٣٠٠ يتم استبعادها.

فمثلًا : بالضغط على المفاتيح



بالترتيب من اليسار لليمين :

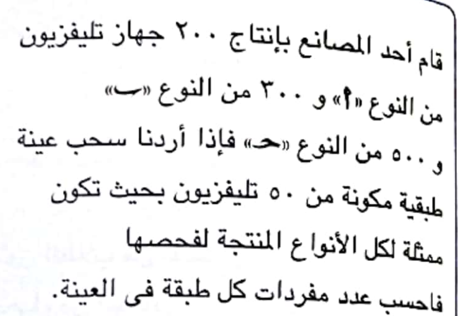
- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,٠٤٩ يكون رقم الشخص المختار هو ٤٩
- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,١٣٢ يكون رقم الشخص المختار هو ١٣٢
- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,١٢ يكون رقم الشخص المختار هو ١٢٠
- إذا حصلنا على الكسر العشرى ٠,٤٥٣ يتم استبعاده لأن رقم ٤٥٣ خارج نطاق الأعداد من ١ إلى ٣٠٠ وهكذا حتى نحصل على ٣٠ رقمًا.

* ونفرض أن الآلة الحاسبة أخرجت الأرقام الموضحة فى الجدول المقابل يكون العمال الذين يحملون هذه الأرقام هم العينة المختارة لإجراء هذا الاستبيان.

٢٧٢	٢٤٩	١٤١	١٢٠	١٣٢	٤٩
١٩٨	٧٤	٢١٣	٤	٢٥٦	٢٥٤
١٣	١٧٢	٤٧	١٥٦	٢	١٣١
٣٨	٩	٨٢	٨٥	٣	٨
١٠٣	١١٨	٢٧٩	٣٤	١٤	٤١

مثال ٢

قام أحد المصانع بإنتاج ٢٠٠ جهاز تليفزيون من النوع «أ» و ٣٠٠ من النوع «ب» و ٥٠٠ من النوع «حـ» فإذا أردنا سحب عينة طبقية مكونة من ٥٠ تليفزيون بحيث تكون ممثلة لكل الأنواع المنتجة لفحصها فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.





الحـل

- العدد الإجمالى للتليفزيونات = ٢٠٠ + ٣٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠ تليفزيون.
- عدد مفردات النوع «أ» فى العينة = $\frac{٢٠٠}{١٠٠٠}$ × ٥٠ = ١٠ تليفزيونات.
- عدد مفردات النوع «ب» فى العينة = $\frac{٣٠٠}{١٠٠٠}$ × ٥٠ = ١٥ تليفزيون.
- عدد مفردات النوع «حـ» فى العينة = $\frac{٥٠٠}{١٠٠٠}$ × ٥٠ = ٢٥ تليفزيون.

حاول بنفسك

مدرسة بها ٣٠٠ طالب ، ٥٠٠ طالبة أرادت عمل استبيان على عينة عددها ٢٤ طالبًا وطالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها. احسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.



١ أكمل ما يأتى :

١ مصادر جمع البيانات هى .... ، .... (بورسعيد ١٢)

٢ تعتبر المقابلة الشخصية من المصادر .... للبيانات.

٣ بيانات الطلاب المسجلة فى مكتب شئون الطلاب من المصادر .... للبيانات.

٤ نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء من المصادر .... للبيانات.

٥ الملاحظة المباشرة من المصادر .... للبيانات.

٦ الأسلوب المناسب لفحص دم مريض هو أسلوب ....

٧ الأسلوب المناسب لفحص إنتاج مصنع هو أسلوب ....

٨ الأسلوب المناسب لمعرفة تعداد السكان هو أسلوب ....

٩ الأسلوب المناسب لمعرفة نسبة الغياب فى إحدى المدارس هو أسلوب ....

١٠ إذا كان المجتمع محل البحث مقسمًا إلى أميين ويقرأون ويكتبون وحاملى المؤهلات المتوسطة وحاملى المؤهلات فوق المتوسطة وحاملى المؤهلات العليا فإن العينة المختارة لإجراء بحث ما تسمى بالعينة ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ من المصادر الثانوية لجمع البيانات .... (الفيوم ١٢)

(أ) المقابلة الشخصية. (ب) الاستبيانات.
(جـ) قاعدة بيانات الموظفين. (د) الملاحظة والقياس.

٢ من المصادر الأولية لجمع البيانات ....

(أ) نشرات مراكز الإحصاء. (ب) بيانات طلاب المدرسة بالسنة الماضية.
(جـ) الاستبيانات. (د) سجلات بيانات موظفى إحدى المؤسسات.

٣ يعتبر أسلوب الحصر الشامل مناسبًا لـ ....

(أ) بحث مكونات رمال الصحراء الغربية.
(ب) فحص نسبة العذوبة لمياه أحد الآبار.
(جـ) بحث نسبة وجود أحد المعادن فى مناطق التعدين.
(د) معرفة عدد الطلاب الحاصلين على الدرجة النهائية فى امتحان الرياضيات بالفصل.

٤ اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى تسمى بالعينة ....

(البحيرة ١٧ ، بورسعيد ١٦ ، الإسكندرية ١٤)

(أ) العشوائية. (ب) الطبقية. (جـ) العمدية. (د) العنقودية.

٥ مصنع به ١٢٥ عاملاً وهم ٧٥ فنيًا ، ٥٠ مهندسًا أخذت عينة طبقية حجمها ٥٠ فردًا تُمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فإن عدد المهندسين فى هذه العينة يساوى .... مهندسًا.

(المنوفية ١٦)

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

أى من مصادر البيانات الإحصائية التالية أولية وأيها ثانوية :

١ استطلاع آراء تلاميذ فصلك عن المكان الذى يريدون أن يذهبوا إليه فى الرحلة القادمة.

٢ أن تقوم بإحصاء عدد المقاعد الموجودة فى كل فصل من فصول مدرستك.

٣ أن تقوم بعمل بحث عن أعداد الناجحين فى كل مادة من المواد الدراسية فى مدرستك فى الدور الأول العام الماضى من واقع سجلات مدرستك.

٤ أن تذهب لإحدى المؤسسات الحكومية بمحافظتك لجمع بيانات عن عدد المواليد المسجلين فى كل مكتب صحة خلال شهر مارس العام الماضى.

٥ البحث فى مواقع الإنترنت عن نتائج إحدى الفرق الرياضية فى مسابقة الدورى المصرى العام ٢٠٠٨ – ٢٠٠٩

قارن بين أسلوبى الحصر الشامل والعينات مبينًا مزايا وعيوب كل منهما.

اذكر الأسلوب المناسب «الحصر الشامل أم العينات» لجمع البيانات فى كل من المجتمعات الإحصائية التالية :

١ مستوى تحصيل فصل دراسى مكون من ٢٥ طالبًا.

٢ مدى صلاحية المياه بأحد الآبار للشرب.

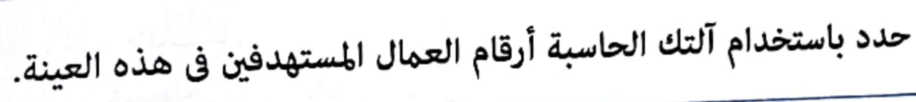
٣ نسبة وجود البترول بأحد المواقع الاستكشافية.

٤ مدى انتشار مرض ما فى ثمار أحد المحاصيل الزراعية.

٥ تعداد المصانع بإحدى المدن الصناعية.

٦ قامت إدارة أحد المصانع باستطلاع رأى ٢٠٠ عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله فى فترة الراحة ، وقد تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠ ثم اختيار عينة تمثل ١٠٪ لسؤالهم عما يفضلون من :

- مشروبات ساخنة.
- وجبات خفيفة.
- مثلجات.



حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة.

٧ تقوم إحدى المدارس الإعدادية بدراسة عن كيفية ذهاب التلاميذ إلى المدرسة فإذا كان عدد تلاميذ المدرسة ٣٢٠ تلميذًا وتم إعطاء كل تلميذ رقمًا من ١ إلى ٣٢٠ واختيار ١٠٪ منهم كعينة لسؤالهم عن طريقة الوصول للمدرسة ما بين :

- سيرًا على الأقدام.
- أتوبيس عام.



- تاكسى.



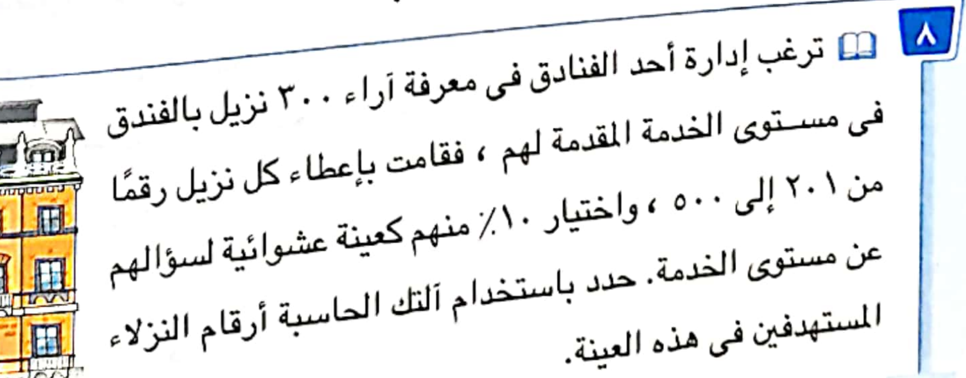
- دراجة.



- سيارة خاصة.



حدد أرقام العينة باستخدام الآلة الحاسبة.



٨ ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بالفندق فى مستوى الخدمة المقدمة لهم ، فقامت بإعطاء كل نزيل رقمًا من ٢٠١ إلى ٥٠٠ ، واختيار ١٠٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة. حدد باستخدام آلتك الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة.



٩ إذا كان هناك فى إحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة ، وأردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ، فاحسب عدد مفردات كل طبقة فى العينة.

«٢٠٠ ، ١٥٠ ، ١٠٠ ، ٥٠»

١٠ أحد مصانع السيارات يقوم بإنتاج ٣ موديلات من السيارات فى العام وتعدادها هو ٣٠٠ سيارة من الموديل الأول ، ٥٠٠ من الموديل الثانى ، ٢٠٠ من الموديل الثالث ، فإذا أرادت إدارة المصنع أخذ عينة تقدر بـ ٥٪ من الإنتاج الإجمالى لها تمثل فيها كل موديل حسب حجم إنتاجه.

- حدد عدد مفردات العينة الكلى.
- حدد عدد مفردات كل طبقة فى العينة على حدة.

«٥٠ ، ١٥ ، ٢٥ ، ١٠»

١١ يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٥٠٠٠ مفردة ومقسم إلى طبقتين تعداد الطبقة الأولى منهما ١٥٠٠ مفردة فإذا كانت المفردات التى تمثل الطبقة الثانية بالعينة ١٤٠ مفردة.

احسب عدد المفردات الكلية للعينة.

«٢٠٠»

١٢ يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة ، ومقسم إلى ثلاث طبقات بيانها كالتالى :

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

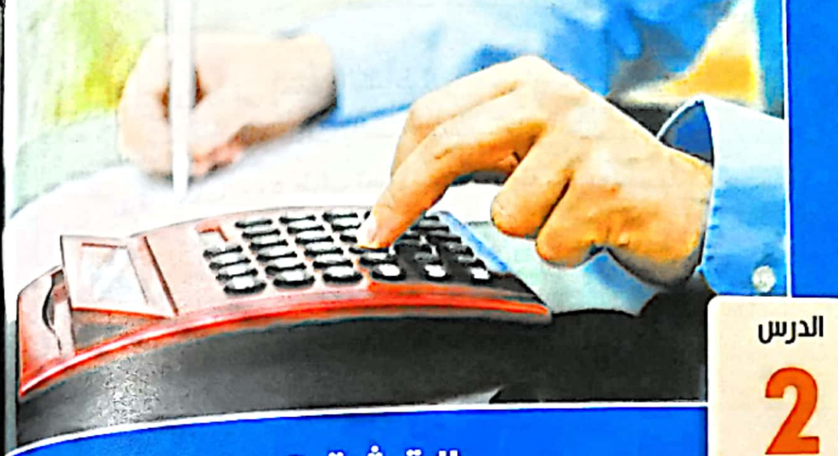
فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى فى العينة ٢٤٠ مفردة ، أوجد حجم العينة كلها. «٨٠٠»

١٣ مجتمع به ٢٠٠٠ مفردة مقسمة إلى ٤ طبقات يراد سحب عينة تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها فقام الباحث بتصميم الجدول التالى :

رقم الطبقة	١	٢	٣	٤	الإجمالى
عدد مفردات الطبقة	٥٠٠	٧٠٠	......	٤٥٠	٢٠٠٠
عدد المفردات التى تمثل الطبقة فى العينة	......	......	٧	......	......

أكمل هذا الجدول.

«٣٥٠ ، ١٠ ، ١٤ ، ٩ ، ٤٠»



الدرس
2

التشتت

• درست سابقًا بعض المقاييس الإحصائية التى عُرفت باسم مقاييس النزعة المركزية كالوسط الحسابى والوسيط والمنوال ، ونعلم أن كلًا منها يعطى وصفًا للتوزيعات التكرارية والبيانات الإحصائية من خلال تعيين قيمة عددية واحدة تتجمع حولها باقى القيم.

فى بعض الحالات لا يكون كافيًا استخدام مقاييس النزعة المركزية وحدها لإعطاء وصف واضح للبيانات ، ولتوضيح ذلك ندرس الحالة الآتية :

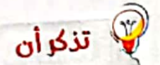
مجموعتان من التلاميذ تتكون كل منهما من ٥ تلاميذ ، أُعطيت كل مجموعة اختبارًا نهايته العظمى ٥٠ درجة فكانت درجات التلاميذ كالتالى :

المجموعة أ : ٢٩ ، ٢٦ ، ٣٥ ، ٣٥ ، ٣٥

المجموعة ب : ٨ ، ٣٥ ، ٤٩ ، ٣٥ ، ٣٣

• عند حساب الوسط الحسابى والوسيط والمنوال لدرجات التلاميذ فى كل مجموعة على حدة نجد النتائج الموضحة فى الجدول التالى :

	الوسط الحسابى	الوسيط	المنوال
المجموعة أ	٣٢	٣٥	٣٥
المجموعة ب	٣٢	٣٥	٣٥



تذكر أن

• الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

• المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر شيوعًا بين هذه القيم.

• الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا.

• فى الحالة السابقة واضح أن المجموعتين مختلفتان ، وبالرغم من ذلك وجدنا أن لهما نفس الوسط الحسابى والوسيط والمنوال ، وهذا لا يعنى أن المجموعتين بالضرورة متماثلتان.

• لذلك فإن مقاييس النزعة المركزية وحدها غير قادرة على وصف مجموعة من التوزيعات التكرارية والبيانات الإحصائية وصفًا كاملًا ، لذلك نحتاج بجانب مقاييس النزعة المركزية التى تعتمد على تعيين قيمة واحدة تتمركز حولها باقى البيانات إلى نوع آخر من المقاييس يعتمد على تعيين درجة تجانس (تقارب) أو تشتت (تباعد) البيانات عن بعضها البعض.

فمثلًا فى المثال السابق :

درجات المجموعة أ متقاربة فتنحصر مفرداتها بين ٢٦ ، ٣٥ درجة بينما

درجات المجموعة ب متباعدة فتنحصر مفرداتها بين ٨ ، ٤٩ درجة

، أى أن درجات المجموعة ب أكثر تشتتًا من درجات المجموعة أ

وتعرف هذه المقاييس **بمقاييس التشتت** وسوف ندرس منها هنا المدى والانحراف المعيارى.

التشتت لأى مجموعة من القيم :

• يُقصد به التباعد أو الاختلاف بين مفرداتها ، ويكون التشتت صغيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات قليلًا ، ويكون التشتت كبيرًا إذا كان الاختلاف بين المفردات كبيرًا (أى إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة) ، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع المفردات.

أى أن : **التشتت لمجموعة من القيم هو مقياس درجة تباعد هذه القيم وهو يعبر عن مدى تجانس المجموعات.**

مقاييس التشتت

١ المدى (أبسط مقاييس التشتت)

يُعرف مدى مجموعة من المفردات بأنه الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة فى المجموعة.

أى أن : **المدى = أكبر مفردة − أصغر مفردة**

فمثلًا :

* إذا كانت قيم المجموعة أ هى ٦٠ ، ٥٨ ، ٦٢ ، ٦١ ، ٥٩ فإن : المدى = ٦٢ − ٥٨ = ٤

* إذا كانت قيم المجموعة ب هى ٧٢ ، ٧٨ ، ٤٦ ، ٦٥ ، ٣٩ فإن : المدى = ٧٨ − ٣٩ = ٣٩

ولذلك يقال إن المجموعة ب أكثر تشتتًا من المجموعة أ

مميزات المدى

طريقة سهلة وبسيطة وتعطى فكرة سريعة عن تباعد وتقارب المفردات ويُعتبر أبسط وأسهل طرق قياس التشتت.

عـيـوب المدى

1. لا يعكس أثر جميع المفردات لأن حسابه يعتمد على أكبر وأصغر مفردة فقط (أى أن حسابه يعتمد على مفردتين فقط مع إهمال باقى المفردات) وبالتالى لا يعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة.
2. يتأثر كثيرًا بالقيم المتطرفة ، فمثلًا مدى مجموعة القيم : ٢١ ، ٢٢ ، ٦١ ، ٢٤ ، ٢٦ هو (٦١ − ٢١ = ٤٠) بينما عند استبعاد المفردة ٦١ منها فإن المدى يصبح (٢٦ − ٢١ = ٥) أى $\frac{1}{8}$ المدى السابق لذلك فإن مقياس المدى هو مقياس تقريبى لا يُعتمد عليه.

٢ الانحراف المعيارى

هو أهم وأدق مقاييس التشتت وأوسعها انتشارًا ، ويمكن حسابه عن طريق : أخذ الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى ويرمز له بالرمز σ وتقرأ (سيجما)

أولًا حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{2}}{ن}}$$

حيث س تشير إلى مفردة من المفردات.

، $\overline{س}$ وتقرأ (س بار) تشير إلى الوسط الحسابى للمفردات.

، ن تشير إلى عدد المفردات ، مجـ تشير إلى عملية الجمع.

مثال ١ احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم : ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل

1. نوجد الوسط الحسابى للقيم $(\overline{س}) = \frac{\text{مجـ}\,س}{ن} = \frac{٨ + ٩ + ٧ + ٦ + ٥}{٥} = ٧$
2. نكون الجدول المقابل :

س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^{2}$
٨	٨ − ٧ = ١	١
٩	٩ − ٧ = ٢	٤
٧	٧ − ٧ = ٠	٠
٦	٦ − ٧ = −١	١
٥	٥ − ٧ = −٢	٤
	المجموع	١٠

3. نقوم بحساب الانحراف المعيارى كما يلى :

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{2}}{ن}} = \sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢} \simeq ١,٤١$$

حاول بنفسك ١

إذا كانت : ٢٥ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٨ ، ٣٠ تمثل درجات أحد التلاميذ فى اختبار الجبر فى ستة شهور مختلفة **أوجد :** ١ الوسط الحسابى. ٢ الانحراف المعيارى.

ثانيًا حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى

$$\text{لأى توزيع تكرارى يكون : الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{2}\,ك}{\text{مجـ}\,ك}}$$

حيث : س تمثل القيمة أو مركز المجموعة ، ك تكرار القيمة أو المجموعة

، مجـ ك مجموع التكرارات ، $\overline{س}$ الوسط الحسابى $= \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ}\,ك}$

أ حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى بسيط

مثال ٢

الجدول الآتى يبين توزيع أعمار ٢٠ شخصًا بالسنين :

العمر	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عدد الأشخاص	٢	٣	٥	٥	١	٤	٢٠

أوجد الانحراف المعيارى للأعمار.

الحل

١ نوجد الوسط الحسابى للأعمار ($\bar{س}$) وذلك باستخدام الجدول المقابل :

العمر (س)	عدد الأشخاص (ك)	س × ك
١٥	٢	٣٠
٢٠	٣	٦٠
٢٢	٥	١١٠
٢٣	٥	١١٥
٢٥	١	٢٥
٣٠	٤	١٢٠
المجموع	٢٠	٤٦٠

∴ الوسط الحسابى ($\bar{س}$) = $\frac{\text{مج}(س \times ك)}{\text{مج } ك} = \frac{٤٦٠}{٢٠} = ٢٣$ سنة.

٢ نكون الجدول التالى :

س	ك	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$	$(س - \bar{س})^٢ \times ك$
١٥	٢	١٥ − ٢٣ = −٨	٦٤	١٢٨
٢٠	٣	٢٠ − ٢٣ = −٣	٩	٢٧
٢٢	٥	٢٢ − ٢٣ = −١	١	٥
٢٣	٥	٢٣ − ٢٣ = ٠	٠	٠
٢٥	١	٢٥ − ٢٣ = ٢	٤	٤
٣٠	٤	٣٠ − ٢٣ = ٧	٤٩	١٩٦
المجموع	٢٠			٣٦٠

٣ نقوم بحساب الانحراف المعيارى كما يلى :

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مج}(س - \bar{س})^٢ \times ك}{\text{مج } ك}} = \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٠}} = \sqrt{١٨} \simeq ٤,٢٤$ سنة.

حاول بنفسك ٢

التوزيع التكرارى التالى يوضح عدد أيام غياب الطلاب فى أحد الفصول :

عدد أيام الغياب	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الطلاب	٥	٧	٧	٥	٦	٣٠

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد أيام الغياب.

ب حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

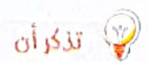


مثال ٣

فيما يلى التوزيع التكرارى للحافز الأسبوعى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع :

الحوافز بالجنيه	−٣٥	−٤٥	−٥٥	−٦٥	−٧٥	−٨٥
عدد العمال	١٠	١٤	٢٠	٢٨	٢٠	٨

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع.



تذكر أن

مركز المجموعة = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$

الحل

١ نوجد الوسط الحسابى للحوافز ($\bar{س}$) وذلك باستخدام الجدول التالى :

المجموعات	مراكز المجموعات (س)	التكرارات (ك)	س × ك
−٣٥	٤٠	١٠	٤٠٠
−٤٥	٥٠	١٤	٧٠٠
−٥٥	٦٠	٢٠	١٢٠٠
−٦٥	٧٠	٢٨	١٩٦٠
−٧٥	٨٠	٢٠	١٦٠٠
−٨٥	٩٠	٨	٧٢٠
المجموع		١٠٠	٦٥٨٠

∴ الوسط الحسابى ($\bar{س}$) = $\frac{\text{مج}(س \times ك)}{\text{مج } ك} = \frac{٦٥٨٠}{١٠٠} = ٦٥,٨$ جنيه.

٢ نكون الجدول التالى :

س	ك	س − س̄	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^2 \times ك$
٤٠	١٠	٤٠ − ٦٥,٨ = −٢٥,٨	٦٦٥,٦٤	٦٦٥٦,٤
٥٠	١٤	٥٠ − ٦٥,٨ = −١٥,٨	٢٤٩,٦٤	٣٤٩٤,٩٦
٦٠	٢٠	٦٠ − ٦٥,٨ = −٥,٨	٣٣,٦٤	٦٧٢,٨
٧٠	٢٨	٧٠ − ٦٥,٨ = ٤,٢	١٧,٦٤	٤٩٣,٩٢
٨٠	٢٠	٨٠ − ٦٥,٨ = ١٤,٢	٢٠١,٦٤	٤٠٣٢,٨
٩٠	٨	٩٠ − ٦٥,٨ = ٢٤,٢	٥٨٥,٦٤	٤٦٨٥,١٢
المجموع	١٠٠			٢٠٠٣٦

٣ نقوم بحساب الانحراف المعيارى بالتعويض فى القانون التالى :

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج}(س - \bar{س})^2 ك}{\text{مج } ك}} = \sqrt{\frac{٢٠٠٣٦}{١٠٠}} \simeq ١٤,١٥ \text{ جنيه.}$$

ملاحظات

- الانحراف المعيارى يتأثر بكافة القيم ولا يتأثر فقط بالقيمتين الصغرى والكبرى كالمدى، لذلك فهو أكثر تعبيرًا من المدى عن مقدار تشتت المجموعة.
- الانحراف المعيارى له نفس وحدة القياس المستخدمة فى البيانات المعطاة.
- القيم الأكثر تجانسًا تكون أقل تشتتًا ويكون الانحراف المعيارى لها أصغر.
- إذا كان الانحراف المعيارى = صفر فمعنى ذلك أن كل قيم المفردات متساوية وهى حالة التجانس التام (التشتت المنعدم).

حاول بنفسك ٢

احسب :

١ الوسط الحسابى.

٢ الانحراف المعيارى.

للتوزيع التكرارى المقابل.

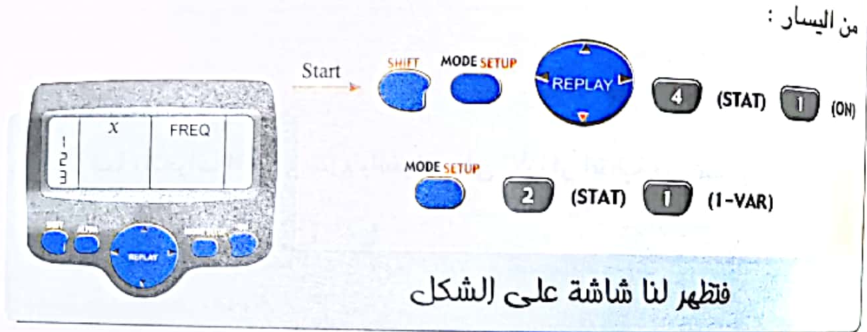
المجموعات	١-	٣-	٥-	٧-	٩ − ١١
التكرار	٧	٣	٥	٣	٢

استخدام الآلة الحاسبة فى حساب الانحراف المعيارى

- يمكن استخدام الآلة الحاسبة CASIO
[fx - 82 ES , fx - 85 ES , fx - 500 ES , fx - 95 ES Plus , fx - 991 ES Plus]
فى حساب الانحراف المعيارى والخطوات التالية توضح كيفية حل المثال السابق (المثال ٣) باستخدام الحاسبة :
- سوف نستخدم هنا الآلة الحاسبة (fx - 95 ES Plus)

خطوة (١)

وقبل إدخال بيانات المثال السابق يجب أولاً ضبط نظام الآلة بضغط المفاتيح التالية من اليسار :



فتظهر لنا شاشة على الشكل

خطوة (٢)

نقوم بإدخال القيم (س) فى حالة التوزيع التكرارى البسيط أو مراكز المجموعات (س) فى حالة التوزيع التكرارى ذى المجموعات فى العمود الأول (x) وبالنسبة للمثال السابق ندخل مراكز المجموعات ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ٩٠ بضغط الأزرار التالية من اليسار :

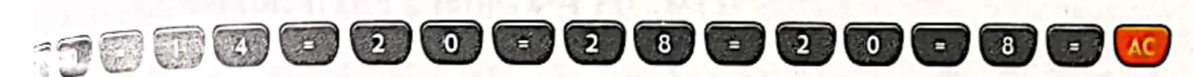
فتظهر لنا شاشة على الشكل

خطوة (٣)

استخدم الأزرار  للانتقال للعمود الثانى (FREQ)

ثم أدخل التكرارات : ١٠ ، ١٤ ، ٢٠ ، ٢٨ ، ٢٠ ، ٨

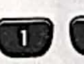
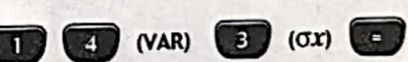
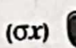
وذلك بضغط الأزرار من اليسار كالتالى :

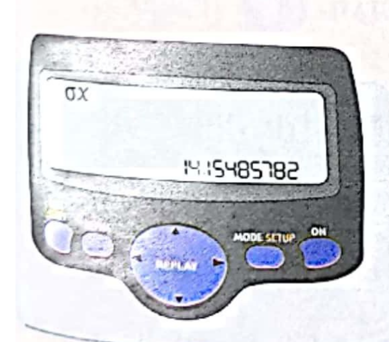


بذلك نكون قد أدخلنا بيانات المثال السابق على الآلة الحاسبة.

خطوة (٤)

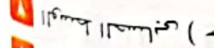
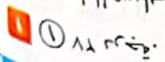
لإيجاد قيمة الانحراف المعيارى نقوم بالضغط على الأزرار التالية من اليسار :

   (VAR)  (σx)  



فتظهر لنا شاشة على الشكل

∴ الانحراف المعيارى $\sigma \simeq$ ١٤,١٥


تمارين 10

على التشتت





أسئلة كتاب الوزارة

1 أكمل ما يأتى :

1 من مقاييس التشتت .... ، .... (سوهاج ١١)

2 أبسط مقاييس التشتت هو .... (دمياط ١١)

3 لأى مجموعة من القيم إذا تساوت جميع المفردات فإن التشتت يساوى .... (دمياط ١١)

4 إذا كان الانحراف المعيارى لتسعة من القيم هو ٣ فإن : $\sum (س - \overline{س})^2$ لهذه القيم هو ....

---

2 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها لمجموعة من المفردات يسمى .... (بورسعيد ١٩ ، الشرقية ١٨ ، سوهاج ١٨)

(أ) المدى. (ب) الوسط الحسابى. (جـ) الوسيط. (د) الانحراف المعيارى.

2 الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى .... (القليوبية ٢٠ ، الفيوم ١٩ ، بورسعيد ١٨ ، كفر الشيخ ١٨)

(أ) المدى. (ب) الوسط الحسابى.

(جـ) الانحراف المعيارى. (د) المنوال.

3 الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوى .... (الفيوم ١٨ ، الإسكندرية ١٧ ، ش. سيناء ١٧)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ١٢

4 المدى لمجموعة القيم : ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ هو .... (القاهرة ١٥)

(أ) ٨ (ب) ١٨ (جـ) ١٩ (د) ٢٣

5 إذا كانت ٦٧ هى أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى يساوى ٢٧ فإن أصغر مفردات هذه المجموعة هى .... (المنيا ١٦)

(أ) ٦٧ (ب) ٤٠ (جـ) ٢٧ (د) ٩٤

٦ القيمة الأكثر تكرارًا لمجموعة من البيانات هى .... (الأقصر ١٦، دمياط ١٢)

(أ) الوسيط. (ب) المدى. (جـ) المنوال. (د) المتوسط الحسابى.

٧ إذا كان الوسط الحسابى للأعداد : ٣ ك − ٣ ، ٣ ك − ١ ، ٢ ك + ١ ، ٢ ك + ٢ ، ٢ ك + ٥ هو ١٣ فإن : ك = ... (الإسكندرية ١١)

(أ) −٥ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) $\frac{١}{٥}$

٨ إذا كان المدى للقيم : ٦ + ك ، ٦ − ك ، ٦ + ٥ ك ، ٦ − ٢ ك هو ١٤ حيث ك ∈ ط (الشرقية ٢٠)

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٩ إذا كان مدى القيم : ٢ ، ٧ ، أ ، ٦ هو ٨ حيث أ > ٠ (الشرقية ١٤)

فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) −١ (د) ١٠

١٠ أى من القيم الآتية للعدد أ تجعل مدى مجموعة القيم : ٥٣ ، أ ، ٥٨ ، ٥٧ ، ٦٠ ، ٥٥ يساوى ٩ ؟ (الدقهلية ١٦)

(أ) ٦٣ (ب) ٦١ (جـ) ٥١ (د) ٥٠

١١ $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه القيم}}$ = ... (الإسكندرية ٢٠، السويس ١٩)

(أ) المدى. (ب) الانحراف المعيارى.

(جـ) الوسط الحسابى. (د) المنوال.

١٢ إذا كان : ٢ س + ٢ ص = ١٠ ، س ∈ ح+ ، ص ∈ ح+ (السويس ١٦)

فإن الوسط الحسابى بين س ، ص هو ....

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ٥ (د) ٢

١٣ أكثر المجموعات الآتية تشتتًا هى المجموعة .... (القليوبية ١٥)

(أ) ٢٨ ، ١٧ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ٢٠ (ب) ٢٠ ، ١٩ ، ٢٩ ، ٣٧ ، ٤٣

(جـ) ٣١ ، ٣٥ ، ٢٦ ، ٣٧ ، ٤١ (د) ٢٥ ، ٣٩ ، ١٩ ، ٥ ، ٢٧

١٤ أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها .... (المنيا ١٨، دمياط ١٤)

(أ) المدى.　　　(ب) الوسط الحسابى.

(جـ) الانحراف المعيارى.　　　(د) الوسيط.

١٥ إذا كانت جميع المفردات متساوية فى القيمة فإن .... (الأقصر ٢٠، ج.سيناء ١٧)

(أ) $س - \overline{س} > ٠$　　　(ب) $س - \overline{س} < ٠$

(جـ) $\sigma = ٠$　　　(د) $\overline{س} = ٠$

١٦ إذا كان : $مجـ (س - \overline{س})^٢ = ٤٨$ لمجموعة من القيم عددها يساوى ١٢

فإن : $\sigma =$ .... (المنوفية ١٩، القاهرة ١٧)

(أ) -٤　　(ب) -٢　　(جـ) ٢　　(د) ٤

٣ أكمل الجدول التالى ثم أجب :

	المجموعة أ	المجموعة ب
القيم	٤٠ ، ٤٥ ، ٥٠ ، ٥٢ ، ٥٥ ، ٥٨	٢٠ ، ٣٥ ، ٥٠ ، ٥٥ ، ٦٠ ، ٨٠
الوسط الحسابى	$\frac{٤٠ + ٤٥ + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots}{٦} = \cdots\cdots$	$\frac{٢٠ + ٣٥ + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots}{٦} = \cdots\cdots$
الوسيط	....	....
المدى	.... − .... = ...	.... − .... = ...
الانحراف المعيارى	....	....

أى المجموعتين أكثر تجانسًا ؟

٤ احسب الانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية :

١ ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧ (بورسعيد ٢٠، المنوفية ١٩، الغربية ١٨، المنوفية ١٧) «٩,٣»

٢ ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩ (دمياط ٢٠، الأقصر ١٩) «٧,١»

٣ ١٥ ، -١٢ ، -٩ ، ٢٧ ، -٦ «١٥,٣»

٤ ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ١٨ «١,٣»

٥ أى المجموعات التالية أكثر تشتتًا ؟ (باستخدام الانحراف المعيارى)

المجموعة (أ) : ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١

المجموعة (ب) : ٢١ ٢٠ ١١ ١٩

المجموعة (جـ) : ٢٩ ٣٠ ٣٠ ٣٥

٦ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من البيانات التالية :

١ ٧٣ ، ٥٤ ، ٦٢ ، ٧١ ، ٦٠ (قنا ٢٠ ، أسيوط ١٧) «٦٤ ، ٧٫٠٧»

٢ ١٣ ، ١٤ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٢ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. (الشرقية ١٧) «١٧ ، ٣٫٢٨٦»

٣ ٦٥ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٦٤ ، ٧٠ ، ٧٦ ، ٧٠ «٦٨ ، ٤٫٦»

٤ ٢٣ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٦ ، ٨ ، ٩ ، ٣٧ ، ١٠ «١٦ ، ٨٫٢»

٧ القيم التالية تمثل درجات خمسة طلاب فى أحد الاختبارات : ٨ ، ٩ ، ٦ ، ١٢ ، ١٠ أوجد:

١ الوسط الحسابى لدرجات الطلاب.

٢ الانحراف المعيارى لدرجات الطلاب. (الدقهلية ١٧) «٩ ، ٢»

٨ الجدول المقابل يبين درجات الحرارة على بعض المدن :

١ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة العظمى.

٢ احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجة الحرارة الصغرى.

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	١١
السويس	٢٦	١٢
العريش	٢٤	١٠
نخل	٢٤	٦
طابا	٢٢	٧
الطور	٢٦	١٦
الغردقة	٢٧	١٥
رفح	٢٦	١١

«٢٥ ، ١٫٥ ، ١١ ، ٣٫٢»

التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة :

(المنوفية ٢٠ ، الإسكندرية ١٩ ، البحيرة ١٦)

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال. «٢ ، ١»

فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة :

(سوهاج ١٨ ، البحيرة ١٧ ، البحيرة ١٤)

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة. «١,٤»

التوزيع التكرارى الآتى يبين عدد الأهداف التى سجلها ٣٠ لاعبًا من ٥ ضربات جزاء لكل منهم فى أحد التدريبات :

عدد الأهداف التى تم تسجيلها	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد اللاعبين	٢	٤	٥	٨	٧	٤

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأهداف المسجلة. «٢,٩ ، ١,٤»

فيما يلى توزيع تكرارى يبين أعمار ١٠ أطفال : (القاهرة ٢٠ ، قنا ١٩ ، الجيزة ١٨ ، الإسكندرية ١٧)

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات. «١,٧»

١٣ الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لعدد الطلاب الفائزين فى المسابقة الفنية من مدرسة بها عشرون فصلًا :

عدد الطلاب الفائزين	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
عدد الفصول	١	٣	٥	٦	٣	٢	٢٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الطلاب. «٢,٦٥ ، ١,٢»

١٤ الجدول التالى يمثل توزيعًا تكراريًا ذى مجموعات لدرجات الحرارة فى بعض المدن العالمية:

مجموعات الدرجات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-
التكرار	٧	٩	١١	١٥	٨

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجات الحرارة. «٣١,٦ ، ١٢,٩»

١٥ للتوزيع التكرارى التالى احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى : (الغربية ١٧ ، قنا ١٦)

المجموعات	صفر -	٤ -	٨ -	١٢ -	١٦- ٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

«١١,٦ ، ٥,٧»

(كفر الشيخ ٢٠)

١٦ الجدول التالى يمثل الأجر اليومى لمجموعة من العمال بأحد المصانع :

مجموعات الأجر	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -
عدد العمال	١٠	١٢	٨	٦	٣	١

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للأجر. «٤٠,٧٥ ، ١٢,٤»

١٧ التوزيع التكرارى التالى يبين كمية البنزين التى تستهلكها مجموعة من السيارات :

عدد الكيلو مترات لكل لتر	٥ -	٧ -	٩ -	١١ -	١٣ -	١٥ - ١٧	المجموع
عدد السيارات	٣	٦	١٠	١٢	٥	٤	٤٠

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الكيلو مترات لكل لتر. «٢,٧»

التوزيع التكرارى التالى يبين قيمة فاتورة الكهرباء لـ ٢٠٠ مشترك :

قيمة الفاتورة بالجنيه	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	المجموع
عدد المشتركين (التكرار)	١٩	٥٠	٨٥	٢٥	١٥	٦	٢٠٠

أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لقيم الفواتير. «٢٩,٢٥ ، ١١,٥»



الجدولان التكراريان التاليان يمثلان توزيع درجات تلاميذ الفصلين أ ، ب فى الصف الثالث الإعدادى فى أحد الاختبارات :

فصل أ

مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

فصل ب

مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٣	١٨	٧	١٠	٤٠

١ مثل كلاً من التوزيعين بالمضلع التكرارى على شكل واحد.

٢ أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لكل من التوزيعين التكراريين.
«٣٠ ، ١٠,٧ ، ٣٠ ، ١١»

٣ أى الفصلين أكثر تجانسًا فى مستوى التحصيل ؟

مصادر جمع البيانات :

- مصادر أولية (ميدانية) : وهى المصادر التى يحصل منها الباحث على البيانات بشكل مباشر.
- مصادر ثانوية (تاريخية) : وهى المصادر التى يحصل منها الباحث على البيانات التى تم تجميعها وتسجيلها من قبل بواسطة آخرين.

أساليب جمع البيانات :

- أسلوب الحصر الشامل : ويقوم على جمع البيانات حول الظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى ، ويستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع.
- أسلوب العينات : ويقوم على جمع البيانات حول الظاهرة محل الدراسة من عينة ممثلة للمجتمع كله وإجراء البحث عليها ، ثم تعميم النتائج على المجتمع كله.

العينات :

- العينة هى جزء صغير من مجتمع كبير تشبه المجتمع وتمثله.
- العينة غير العشوائية (العمدية) : هى عينة يتم فيها اختيار مفردات بعينها من مفردات المجتمع الإحصائى دون غيرها بحيث تناسب أهداف البحث.
- العينة العشوائية البسيطة : هى عينة تستخدم مع المجتمعات المتجانسة الغير مقسمة بطبيعتها إلى فئات أو طبقات.
- العينة العشوائية الطبقية : هى عينة تستخدم فى حالة المجتمعات الإحصائية غير المتجانسة المقسمة بطبعها إلى مجموعات نوعية تختلف فى الصفات.
- عدد مفردات الطبقة فى العينة = $\frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلى}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}}$ × عدد مفردات العينة

«مع تقريب الناتج لأقرب وحدة»

التشتت :

- التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات.
- المدى لمجموعة من المفردات هو الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة فى المجموعة.

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

(أ) المدى. (ب) الوسط الحسابى.

(جـ) الوسيط. (د) الانحراف المعيارى.

٢ إذا كان : مجـ $(س - \overline{س})^٢$ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها ٩ فإن : σ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

٣ اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى تسمى بالعينة ....

(أ) العشوائية. (ب) الطبقية. (جـ) العمدية. (د) العنقودية.

٤ المدى لمجموعة القيم : ٥ ، ١٤ ، ٤ ، ٣٧ ، ١٥ ، ١٦ ، ٧ هو ....

(أ) ٣٠ (ب) ٣٣ (جـ) ٣٢ (د) ٢٢

٥ الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

(أ) المدى. (ب) الوسط الحسابى.

(جـ) الوسيط. (د) الانحراف المعيارى.

٦ الانحراف المعيارى للكميات : ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ٦٢ (د) ٢

٢ احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم الآتية :

١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

٣ إذا كان بيان عدد الأفراد في ٥٠ أسرة كما يلي :

عدد الأفراد	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الأسر	٥	٧	٨	١٢	٩	٥	٤

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الأفراد.

٤ التوزيع التكراري الآتي يبين درجات ٢٠ طالبًا في أحد الاختبارات :

المجموعات	صفر-	٢-	٤-	٦-	٨-
التكرار	١	٣	٦	٥	٥

احسب الانحراف المعياري.



مشروع بحثى

على الوحدة الثالثة

أهداف المشروع

- جمع البيانات وتنظيمها فى جداول تكرارية ذات مجموعات.
- حساب المدى لمجموعة من المفردات.
- حساب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات.
- تقدير دور الإحصاء فى الحياة العملية.

المطلوب

« يعتبر الانحراف المعيارى أهم وأدق مقاييس التشتت وأوسعها انتشارا »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- اختر اثنين من مقاييس التشتت وتكلم عنهما موضحًا مميزات وعيوب كل منهما.
- سجل درجات أصدقائك بالفصل فى أحد امتحانات مادة الرياضيات، وفى أحد امتحانات مادة الدراسات الاجتماعية، ثم قُم بما يلى :

(١) أوجد المدى لدرجات فصلك فى كل مادة من المادتين.

(٢) كون الجدول التكرارى ذى المجموعات لدرجات مادة الرياضيات، ومن هذا الجدول احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجات فصلك فى مادة الرياضيات.

(٣) كون الجدول التكرارى ذى المجموعات لدرجات مادة الدراسات الاجتماعية، ومن هذا الجدول احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لدرجات فصلك فى مادة الدراسات الاجتماعية.

(٤) اذكر المادة التى يكون مستوى تحصيل فصلك فيها أكثر تجانسًا.



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(الإسكندرية ١٦)

١ {٢} ⊂ ....

(أ) (٣ ، ٧)　(ب)]٣ ، ٧[　(جـ) [٣ ، ٧]　(د) {٣ ، ٧}

(مطروح ١٧)

٢ [٢ ، ٧] − {٢ ، ٧} = ...

(أ) [١ ، ٦]　(ب) ∅　(جـ)]٢ ، ٧[　(د) {٠}

(الوادى الجديد ٢٠)

٣ العدد التالى فى النمط : $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٢}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٤٨}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٥٠}$　(ب) $\sqrt{٧٥}$　(جـ) $\sqrt{٦٠}$　(د) $\sqrt{٩٠}$

(الأقصر ١٧)

٤ $٢^{٢٠١٧} = ٢^{٢٠١٦} +$ ....

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) ٢٠١٦　(د) $٢^{٢٠١٦}$

٥ إذا كانت : [−١ ، س] ∩ [ص ، ٥] = [٢ ، ٣]　فإن : $س^{ص}$ = ...

(أ) ٨　(ب) $\frac{١}{٥}$　(جـ) ٩　(د) −١

٦ عندما يزداد طول ضلع مربع بنسبة ١٠٪ فإن مساحته تزداد بنسبة .... ٪

(أ) ١٠　(ب) ١٥　(جـ) ٢٠　(د) ٢١

٧ نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها س سم إلى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها ٢ س سم كنسبة .... (بنى سويف ١٧)

(أ) ١ : ٢　(ب) س : ٤　(جـ) ١ : ٤　(د) ٤ : ١

٨ إذا كان : ف عددًا فرديًا فإن العدد الفردى التالى له هو .... (ج.سيناء ١٩ ، الجيزة ١٧)

(أ) $ف^٢$ (ب) $ف^٢ + ف$ (ج) ف + ١ (د) ف + ٢

٩ إذا كانت : م تمثل عددًا سالبًا فأى من الآتى يمثل عددًا موجبًا ؟ (كفر الشيخ ١٧)

(أ) $م^٣$ (ب) $م^٢$ (ج) ٢ م (د) $\frac{م}{٢}$

١٠ نصف العدد $٢^{٢٠٢}$ هو .... (دمياط ١٧)

(أ) $٢^{١٠١}$ (ب) $١^{٢٠١}$ (ج) $٢^{١٩}$ (د) $١^{١٠١}$

١١ إذا كانت : $(س - ٣)^{صفر} = ١$ فإن : س ∋ .... (المنوفية ١٨)

(أ) ع (ب) ع − {٣} (ج) ع − {٤} (د) ع − {١}

١٢ $\left(\frac{\sqrt{٥} + ١}{٢}\right)^{١٠٠٠} \left(\frac{\sqrt{٥} - ١}{٢}\right)^{١٠٠٠} = ...$ (المنوفية ١٨)

(أ) صفر (ب) ١ (ج) $\frac{٥^{١٠٠٠} - ١}{٤}$ (د) $٤^{١٠٠٠}$

١٣ $٣^س + ٣^س + ٣^س = ...$ (السويس ١٦)

(أ) $٩^س$ (ب) $٣^{٣س}$ (ج) $٣^{س+١}$ (د) $٣^{س+٢}$

١٤ $٢^٥ + ٢^٥ + ٢^٥ + ٢^٥ = ...$ (الأقصر ١٦)

(أ) $٢^٧$ (ب) $٢^٦$ (ج) $٢^٤$ (د) $٢^{٢٠}$

١٥ إذا كان : س − ص = ٥ ، س + ص = $\frac{١}{٥}$

فإن : $س^٢ - ص^٢ = ...$ (أسوان ٢٠ ، كفر الشيخ ١٧)

(أ) $\frac{١}{٢٥}$ (ب) ١ (ج) ٢٥ (د) ٥

١٦ إذا كان : س + ص = ص س = ٥

فإن : $س^٢ ص + ص^٢ س = ...$ (الإسماعيلية ٢٠ ، أسوان ١٦)

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (ج) ٢٠ (د) ٢٥

١٧ إذا كان : $(س - ص)^٢ = ٢٠$ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٠$

فإن : س ص = ... (الإسكندرية ١٦)

(أ) ١٠ (ب) ٥ (ج) −٥ (د) ٢٠

(١٨) إذا كان : $١ < س < ٣$ ، س $\in$ ح فإن : $(٣ س - ١) \in$ .... (الجيزة ٢٠)

(أ) $[٢ ، ٨[$ (ب) $[٢ ، ٨]$ (جـ) $]٢ ، ٨[$ (د) $\{٢ ، ٨\}$

(١٩) مجموعة حل المتباينة $٥ - ٣ س < ١١$ فى ح هى .... (كفر الشيخ ١٧)

(أ) $]-\infty ، -٢]$ (ب) $[-٢ ، \infty[$ (جـ) $]-\infty ، -٢]$ (د) $[-٢ ، ٢]$

(٢٠) مجموع الجذرين التربيعيين للعدد $٢ \frac{١}{٤}$ هو .... (ش. سيناء ١٩ ، المنوفية ١٧)

(أ) $١ \frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٢}$

(٢١) أربعة أمثال العدد $٢^{٨}$ هو .... (سوهاج ١٩ ، الإسكندرية ١٧)

(أ) $٢^{٣٢}$ (ب) $٨^{٨}$ (جـ) $٢^{١٠}$ (د) $٤^{٨}$

(٢٢) إذا كان : $س = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $ص = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$ (الغربية ١٧)

فإن : $(س + ص)^{٢} =$ ....

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٩ (د) ١٢

(المنوفية ١٧)

(٢٣) إذا كان : $٢^{س} = \frac{١}{٨}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) -٣

(٢٤) إذا كان عدد صفحات كتاب هو ٥٦ صفحة ، كم صفحة يظهر بها الرقم ٥ فى ترقيم صفحات الكتاب ؟

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٢٥) طريق طوله ١٢ كم وضعنا على جانب واحد منه أعمدة إنارة من بدايته حتى نهايته وكانت المسافة بين كل عمودين $\frac{١}{٢}$ كيلو متر فإن عدد الأعمدة يساوى ....

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٢٣

(الإسكندرية ١٧)

(٢٦) العدد الذى يقع بين ٠,٠٧ ، ٠,٠٨ هو ....

(أ) ٠,٠٠٠٧٥ (ب) ٠,٠٠٧٥ (جـ) ٠,٠٧٥ (د) $-٠,٧٥$

٢٧ مربع ضعف العدد (نصف) هو ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (ج) ١ (د) ٢

٢٨ إذا كان ثلاثة أمثال عدد = ٤٥ ، فإن : $\frac{١}{٥}$ هذا العدد يساوى .... (المنيا ١٩)

(أ) ١٥ (ب) ٥ (ج) ٣ (د) ٩

٢٩ إذا كان : $\frac{٥}{٤} + \frac{٥}{س} = \frac{٥}{٢}$ فإن : س = ... (المنوفية ٢٠)

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) $\frac{٥}{٢}$

٣٠]−١ ، ٣] ∩ {−٣ ، −١} = ... (أسيوط ١٨)

(أ) ∅ (ب) {−٣} (ج) {−١} (د) {٣}

٣١ [٢ ، ٧] −]٢ ، ٧[= .... (بنى سويف ١٨)

(أ) ∅ (ب) {٢} (ج) {٧} (د) {٢ ، ٧}

٣٢ ص ∪ ط = ... (الإسكندرية ١٨ ، الأقصر ١٧)

(أ) ∅ (ب) ط (ج) ص (د) ع

٣٣ المقدار : (س − ٢)^{٢} − س^{٢} من الدرجة .... (كفر الشيخ)

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (ج) الثالثة. (د) الرابعة.

٣٤ مجموعة حل المعادلة : س − ١ = | −١ | فى ط هى .... (السويس ١٨)

(أ) (١ ، ٢) (ب) ٢ (ج) {٢} (د) {−٢}

٣٥ إذا كان : ١٧ س + ٨ = ١١ فإن : ١٧ س + ١١ = ... (الإسماعيلية)

(أ) ٨ (ب) ١١ (ج) ١٤ (د) ١٧

ثانياً حساب المثلثات والهندسة



الوحدة

4 حساب المثلثات



دروس الوحدة :

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان



أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة.
- يتعرف النسب المثلثية الأساسية للزوايا التى قياساتها ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°
- يوجد النسب المثلثية الأساسية لزاوية معلومة.
- يوجد قياس زاوية بمعرفة إحدى نسبها المثلثية.
- يستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب المثلثية الأساسية.

معلومة إثرائية

حساب المثلثات هو فرع من فروع الرياضيات ، وهو أحد فروع علم الهندسة العامة ، ويتناول دراسة الزوايا والمثلثات والتوابع المثلثية مثل الجيب وجيب التمام ، يعتبر قدماء المصريين أول من عمل بقواعد حساب المثلثات إذ استخدموها فى بناء الأهرامات وبناء معابدهم ، ولحساب المثلثات تطبيقات كثيرة منها حساب المسافات والزوايا فى إنشاء المبانى والطرق ، وفى صناعة الموتورات وأجهزة التليفزيون وملاعب الكرة ، وكذلك فى حساب المسافات الجغرافية والفلك وأنظمة الاستكشاف بالأقمار الصناعية.

الدرس **1**

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

تمهيد

* سبق أن درست وحدات القياس الستينى للزاوية وهى :

الدرجة ويرمز لها بالرمز °١ ، الدقيقة ويرمز لها بالرمز ١َ ، الثانية ويرمز لها بالرمز ١ً

فمثلًا : الزاوية التى قياسها ٢٢ درجة ، ٣٦ دقيقة ، ٤٨ ثانية تُكتب ٤٨ً ٣٦َ °٢٢

العلاقة بين الدرجات والدقائق والثوانى :

°١ = ٦٠َ ، ١َ = ٦٠ً

أى أن : °١ = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠ً

مثال ١

١ اكتب بالدرجات : ٤٨ً ٣٦َ °٢٢

٢ اكتب بالدرجات والدقائق والثوانى : °٤٥,١٨

الحل

١ نحول الدقائق إلى درجات كالتالى : ٣٦َ = $\frac{٣٦}{٦٠}$ = °٠,٦

نحول الثوانى إلى درجات كالتالى : ٤٨ً = $\frac{٤٨}{٣٦٠٠}$ = °٠,٠١٣̇

أى أن : ٤٨ً ٣٦َ °٢٢ = °٠,٠١٣̇ + °٠,٦ + °٢٢ = °٢٢,٦١٣̇

> **تذكر أن**
> ٠,٠٠٣̇ يُقرأ : ٠,٠٠٣ دائرى

حل آخر باستخدام الآلة الحاسبة العلمية :

نضغط على مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار إلى اليمين كالتالى :

2 2 °''' 3 6 °''' 4 8 °''' = °'''

فنجد الناتج : ٢٢,٦١٣٣٣٣٣

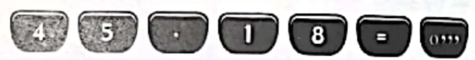
٢ نحول °٠,١٨ إلى دقائق كالتالى : ٠,١٨ × ٦٠ = ١٠,٨َ

نحول ٠,٨َ إلى ثوانى كالتالى : ٠,٨ × ٦٠ = ٤٨ً

أى أن : °٤٥,١٨ = ٤٨ً ١٠َ °٤٥

حل آخر باستخدام الآلة الحاسبة العلمية :

نضغط على مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار إلى اليمين كالتالى :



فنجد الناتج : ٤٨ً ١٠َ °٤٥

مثال ٢

إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين ٧ : ٩ فأوجد القياس الستينى لكل منهما.

الحل

نفرض أن قياسى الزاويتين : ٧ س ، ٩ س

∴ ٧ س + ٩ س = °٩٠

∴ ١٦ س = °٩٠

∴ س = $\frac{°٩٠}{١٦}$ = °٥,٦٢٥

∴ قياس الزاوية الأولى = °٥,٦٢٥ × ٧ = °٣٩,٣٧٥ = ٣٠ً ٢٢َ °٣٩

، قياس الزاوية الثانية = °٥,٦٢٥ × ٩ = °٥٠,٦٢٥ = ٣٠ً ٣٧َ °٥٠

> **تذكر أن**
> • مجموع قياسى الزاويتين المتتامتين = °٩٠
> • مجموع قياسى الزاويتين المتكاملتين = °١٨٠
> • مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = °١٨٠

حاول بنفسك ١

إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين ٥ : ١١ فأوجد القياس الستينى لكل منهما.

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

النسبة المثلثية للزاوية الحادة :

هى نسبة بين طولى ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية التى تقع فيه هذه الزاوية.

ويوجد ثلاث نسب مثلثية أساسية للزاوية الحادة وهى :

١ جيب الزاوية :

وتُكتب اختصارًا (جا) وتساوى $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

٢ جيب تمام الزاوية :

وتُكتب اختصارًا (جتا) وتساوى $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

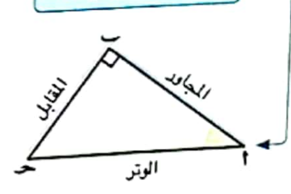
٣ ظل الزاوية :

وتُكتب اختصارًا (ظا) وتساوى $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

أى أنه :

إذا كان Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب فإن :

بالنسبة لزاوية أ

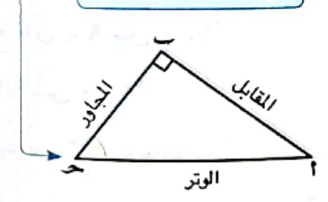


١ جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$

٢ جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

٣ ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أ ب}}$

بالنسبة لزاوية ح



١ جا ح = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

٢ جتا ح = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$

٣ ظا ح = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

فمثلاً : فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب

وكان : أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم ، أ ح = ٥ سم

فإن :

١ جا أ = $\frac{٤}{٥}$

٢ جتا أ = $\frac{٣}{٥}$

٣ ظا أ = $\frac{٤}{٣}$

١ جا ح = $\frac{٣}{٥}$

٢ جتا ح = $\frac{٤}{٥}$

٣ ظا ح = $\frac{٣}{٤}$

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ حيث :

أ ب = ٩ سم ، أ ح = ١٢ سم

١ أوجد كلًا من : جا ب ، جتا ب ، ظا ب ، جا ح ، جتا ح ، ظا ح

٢ أثبت أن : جا ب جتا ح + جتا ب جا ح = ١

الحل

∵ Δ أ ب ح فيه : ق(∠ أ) = ٩٠°

∴ (ب ح)^2 = (أ ب)^2 + (أ ح)^2 (فيثاغورس)

∴ (ب ح)^2 = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥

∴ ب ح = ١٥ سم

١ جا ب = $\frac{\text{أ ح}}{\text{ب ح}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

، ظا ب = $\frac{\text{أ ح}}{\text{أ ب}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ، جا ح = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

، جتا ح = $\frac{\text{أ ح}}{\text{ب ح}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$ ، ظا ح = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

٢ جا ب جتا ح + جتا ب جا ح = $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = \frac{٢٥}{٢٥} = ١$

تذكر نظرية فيثاغورس

إذا كان : Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب فإن :

- (أ ح)^2 = (أ ب)^2 + (ب ح)^2
- (أ ب)^2 = (أ ح)^2 − (ب ح)^2
- (ب ح)^2 = (أ ح)^2 − (أ ب)^2

ملاحظات

في المثال السابق لاحظ أن :

① جا ب = جتا حـ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا حـ = جتا ب = $\frac{٣}{٥}$

وبملاحظة أن : ق (∠ب) + ق (∠حـ) = ٩٠° (زاويتان متتامتان).

يمكن أن نستنتج أن :

جيب أي زاوية حادة يساوى جيب تمام الزاوية المتممة لها.

أي أنه : إذا كان : ق (∠أ) + ق (∠ب) = ٩٠°

فإن : جا أ = جتا ب ، جا ب = جتا أ

والعكس صحيح أي أنه :

إذا كانت ∠أ ، ∠ب زاويتين حادتين وكان : جا أ = جتا ب

فإن : ق (∠أ) + ق (∠ب) = ٩٠°

② $\frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}} = \frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣}$ ، ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ظا ب = $\frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}$

، $\frac{\text{جا حـ}}{\text{جتا حـ}} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤}$ ، ظا حـ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ ظا حـ = $\frac{\text{جا حـ}}{\text{جتا حـ}}$

وبصفة عامة يكون : ظل الزاوية = $\frac{\text{جيب الزاوية}}{\text{جيب تمام الزاوية}}$

حاول بنفسك ٢

س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه : س ص = ٤ سم ، س ع = ٥ سم

١ أوجد قيمة : ٢ جا س جتا س

٢ أثبت أن : جا س جتا ع + جتا س جا ع = ١



مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم

، رسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ يقطعها فى ء

١ أوجد قيمة : جا ب + جتا حـ

٢ أوجد قيمة : ظا (∠حـ أ ء)

٣ بيّن أن : جا حـ + جتا حـ > ١ ثم أوجد قيمة : جا² حـ + جتا² حـ

واستنتج أن : جا² حـ + جتا² حـ < جا حـ + جتا حـ

الحل

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ب = أ حـ ∴ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ب ء = ء حـ = ٦ سم

فى Δ أ ب ء : ∵ ق (∠أ ء ب) = ٩٠°

∴ (أ ء)² = (أ ب)² − (ب ء)² (فيثاغورس)

∴ (أ ء)² = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤ ∴ أ ء = ٨ سم

١ ∵ جا ب = $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا حـ = $\frac{\text{ء حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ جا ب + جتا حـ = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٥}$

٢ ظا (∠حـ أ ء) = $\frac{\text{حـ ء}}{\text{أ ء}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

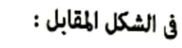
٣ ∵ جا حـ = $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، جتا حـ = $\frac{٣}{٥}$

∴ جا حـ + جتا حـ = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٥}$ ∴ جا حـ + جتا حـ > ١

، جا² حـ + جتا² حـ = $\left(\frac{٤}{٥}\right)^2 + \left(\frac{٣}{٥}\right)^2 = \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = ١$

∴ جا² حـ + جتا² حـ < جا حـ + جتا حـ

مثال ٥

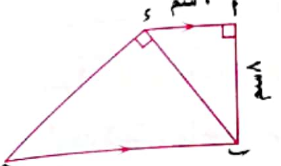


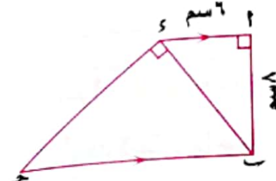
في الشكل المقابل :

ا ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق(∠ا) = ق(∠ب ء حـ) = ٩٠°

، ا ء // ب حـ ، ا ء = ٦ سم ، ا ب = ٨ سم

أوجد : طول ء حـ





الحل

∵ Δ ا ب ء فيه : ق(∠ا) = ٩٠° ∴ $(ب ء)^2 = (ا ب)^2 + (ا ء)^2$ = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

∴ ب ء = ١٠ سم

، ∵ ا ء // ب حـ ، ب ء قاطع لهما ∴ ق(∠ا ء ب) = ق(∠ء ب حـ) (بالتبادل)

∴ ظا(∠ا ء ب) = ظا(∠ء ب حـ) ∴ $\frac{ا ب}{ا ء} = \frac{ء حـ}{ب ء}$

∴ $\frac{٨}{٦} = \frac{ء حـ}{١٠}$ ∴ ء حـ = $\frac{١٠ \times ٨}{٦}$ = $١٣\frac{١}{٣}$ سم (وهو المطلوب)

لاحظ أنه يمكن أيضًا حل المثال السابق باستخدام التشابه.

حاول بنفسك ٣

في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٩٠°

، ء ∈ ب حـ ، هـ ∈ ا حـ بحيث ء هـ ⊥ ا حـ

، ء هـ = ٣ سم ، هـ حـ = ٤ سم

أثبت أن : جا ا جتا حـ + جا حـ جتا (∠هـ ء حـ) = ١

مثال ٦

في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

، ء ∈ ا ب بحيث : ا ء = ٦ سم ، ء ب = ٤ سم

إذا كان : ك طا س = $\sqrt{٣}$

فأوجد قيمة : ك

الحل

العمل : نرسم ء هـ ⊥ ب حـ تقطعها فى هـ

البرهان : ∵ Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ب) = ٦٠°

، فى Δ ء ب هـ : ∵ ء هـ ⊥ ب حـ

∴ ق(∠ء هـ ب) = ٩٠°

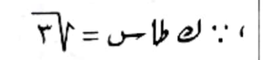
∴ ق(∠ب ء هـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = ٣٠° ∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ ب ء = ٢ سم

، ∵ $(ء هـ)^2 = (ب ء)^2 - (ب هـ)^2$ (فيثاغورس) ∴ $(ء هـ)^2$ = ١٦ − ٤ = ١٢

∴ ء هـ = $\sqrt{١٢} = ٢\sqrt{٣}$ سم ، ∵ ب حـ = ا ب = ١٠ سم

∴ هـ حـ = ب حـ − ب هـ = ١٠ − ٢ = ٨ سم ∴ طا س = $\frac{ء هـ}{هـ حـ} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٨} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}$

، ∵ ك طا س = $\sqrt{٣}$ ∴ ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$



∴ ك = $\sqrt{٣} \times \frac{٤}{\sqrt{٣}}$ = ٤ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٤

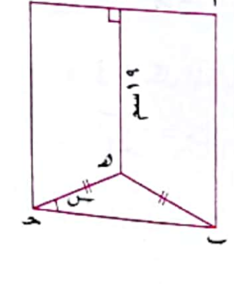
في الشكل المقابل :

ا ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٤ سم

، هـ نقطة داخله بحيث ب هـ = حـ هـ ، و هـ = ١٩ سم

، هـ و ⊥ ا ء فإذا كان : ك (جتا س − جا س) = $\frac{١}{١٣}$

فأوجد قيمة : ك





تمارين 1

على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ ٨ً ٣٨َ ٨٥° = ... (بالدرجات)

٢ ٥٦,١٨° = ... (بالدرجات والدقائق والثوانى)

٣ فى الشكل المقابل :

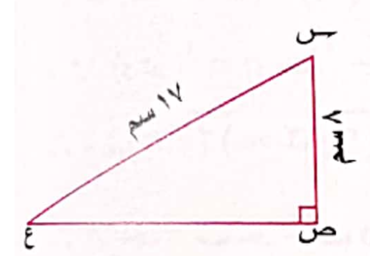
س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه :

س ص = ٨ سم ، س ع = ١٧ سم فإن :

(أ) جاس = ... ، جا ع = ...

(ب) جتا س = ... ، جتا ع = ...

(جـ) ظاس = ... ، ظا ع = ...



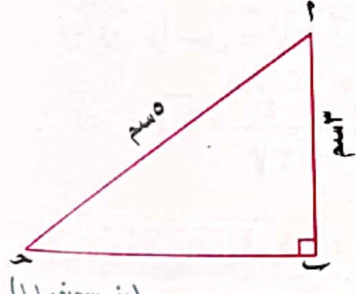
٤ فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، أ ب = ٣ سم

، أ حـ = ٥ سم

فإن : جا حـ × جتا حـ = ...



(بنى سويف ١١)

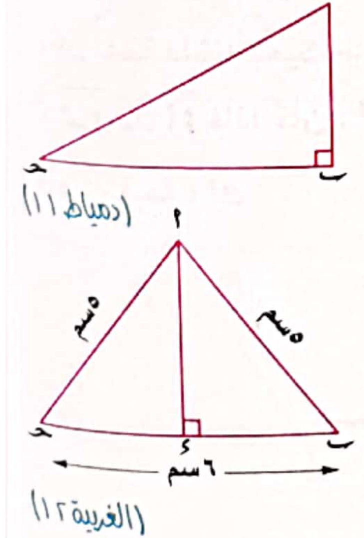
٥ فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ = جتا ....

(دمياط ١١)

٦ فى الشكل المقابل :

جتا ب = ...



(الغربية ١٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ لأى زاوية حادة أ يكون طا أ = …………… (الإسماعيلية ١٢)

(أ) $\frac{\text{جتا أ}}{\text{جا أ}}$ (ب) جا أ جتا أ (جـ) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ (د) جا أ + جتا أ

٢ إذا كان : س ، ص قياسى زاويتين متتامتين وكان جا س = $\frac{٣}{٥}$

فإن : جتا ص = …………… (الجيزة ٢٠ ، البحيرة ١٨ ، الجيزة ١٧)

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

٣ لأى زاويتين حادتين أ ، ب إذا كان : جا أ = جتا ب

فإن : ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ……………

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

٤ إذا كان : جا ٧٠° = جتا س حيث س قياس زاوية حادة فإن : س = ……………

(القليوبية ١٨)

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٠° (د) ٢٠°

٥ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٨٥° ، جا ب = جتا ب

فإن : ق (∠ حـ) = …………… (الدقهلية ١٩ ، البحيرة ١٧ ، المنوفية ١٦)

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٥٠° (د) ٦٠°

٦ فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب يكون : جا أ + جتا حـ = …………… (المنوفية ١٧)

(أ) ٢ جا أ (ب) ٢ جا حـ (جـ) ٢ جا ب (د) ٢ جتا أ

٧ فى المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى أ

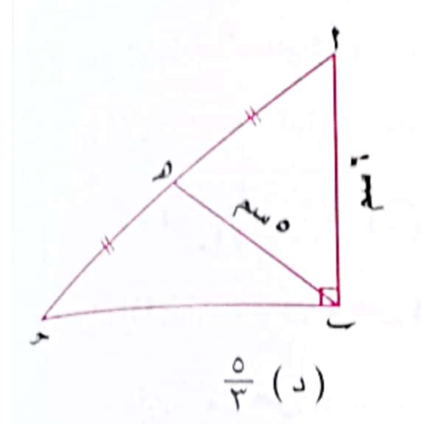
يكون جيب تمام الزاوية ب : جيب الزاوية حـ يساوى …………… (الشرقية ١٨)

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

٨ فى المثلث ء هـ و القائم الزاوية فى هـ ، أى العلاقات التالية خطأ ؟ (الدقهلية ١٦)

(أ) طا ء × طا و = ١ (ب) جا ء = جتا و

(جـ) جتا ء = جا و (د) جتا ء = جا هـ



٩ في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، $\overline{ب هـ}$ متوسط

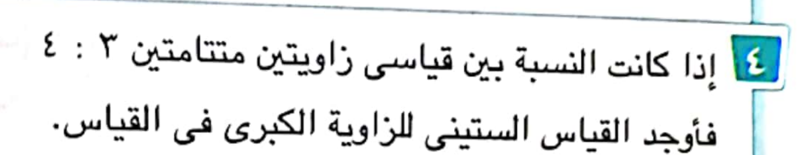
، ب هـ = ٥ سم ، أ ب = ٦ سم

فإن : جا جـ = ... (أسوان ١٦)

(أ) $\frac{٥}{٦}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

٣ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين ٣ : ٥

فأوجد القياس الستيني لكل منهما. (الغربية ١٩ ، أسوان ١٥ ، البحيرة ١٤)



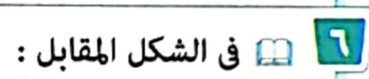
«٦٧° ٣٠َ ، ١١٢° ٣٠َ»

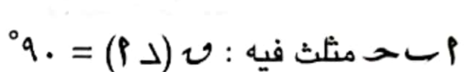
٤ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٣ : ٤

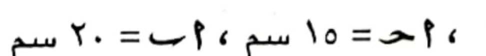
فأوجد القياس الستيني للزاوية الكبرى في القياس. «٥١° ٢٥َ ٤٣ً»

٥ إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمثلث ٣ : ٤ : ٧

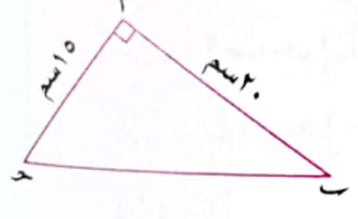
فأوجد القياس الستيني لكل زاوية. (البحيرة ١٣) «٣٨° ٣٤َ ١٧ً ، ٥١° ٢٥َ ٤٣ً ، ٩٠°»







٦ في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٩٠°

، أ جـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم

أثبت أن : جتا جـ جتا ب − جا جـ جا ب = صفر (الجيزة ٢٠ ، المنيا ١٩ ، القليوبية ١٨ ، البحيرة ١٧)

٧ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم

أوجد قيمة كل من : [١] طا س × طا ص [٢] $جا^٢$ س + $جا^٢$ ص (بورسعيد ١٨) «١ ، ١»

٨ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه : ب جـ = ٤ سم ، أ جـ = ٥ سم

استنتج أن : $جا^٢$ أ − $جتا^٢$ أ = ٢ $جا^٢$ أ − ١

٩ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان أ ب : أ جـ = ٣ : ٥

فأوجد : النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ (أسوان ١٣)

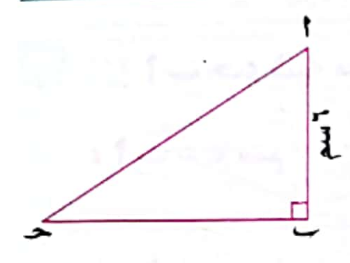
١٠ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فإذا كان : ص ع = ٢ س ص

فأوجد قيمة كل من : طا ع ، طا س ، حا ع ، حا س «$\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٥}}$»

١١ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان : ٢ ا ب = $\sqrt{٣}$ ا حـ

فأوجد : النسب المثلثية الأساسية للزاوية حـ (أسوان ١٩ ، الدقهلية ١٨ ، الإسكندرية ١٥) «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٣}$»

١٢ فى الشكل المقابل :



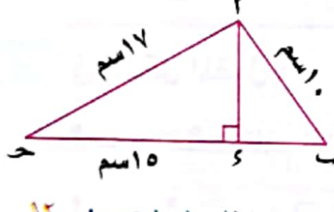
ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، ا ب = ٦ سم ، طا حـ = $\frac{٣}{٤}$

أوجد : [١] طول كل من : $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ا حـ}$

[٢] حا ا + حتا ا (المنوفية ١٦ ، الإسماعيلية ١٢) «٨ سم ، ١٠ سم ، $\frac{٧}{٥}$»

١٣ فى الشكل المقابل :

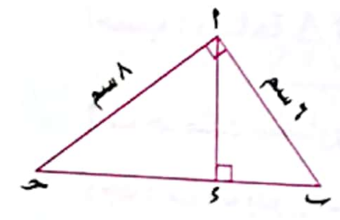


$\overline{ا ء} \perp \overline{ب حـ}$ ، ا حـ = ١٧ سم

، ء حـ = ١٥ سم ، ا ب = ١٠ سم

أوجد قيمة : ٣ طا حـ + حا ب (الإسماعيلية ١٤) «$\frac{١٢}{٥}$»

١٤ فى الشكل المقابل :



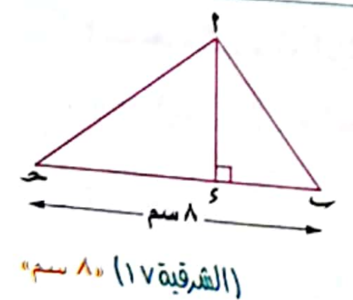
ق(∠ ب ا حـ) = ٩٠° ، $\overline{ا ء} \perp \overline{ب حـ}$

فإذا كان : ا ب = ٦ سم ، ا حـ = ٨ سم

أوجد : [١] طا (∠ ب ا ء)

[٢] حا (∠ ء ا حـ) + حتا (∠ ء ا ب) (الغربية ١٦) «$\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٧}{٥}$»

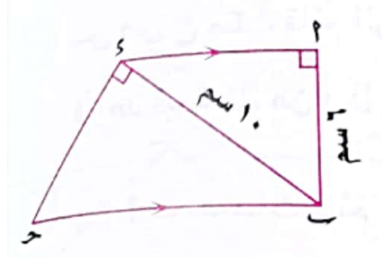
١٥ فى الشكل المقابل :



Δ ا ب حـ حاد الزوايا

، ب حـ = ٨ سم ، $\overline{ا ء} \perp \overline{ب حـ}$

أوجد قيمة : ا ب حتا ب + ا حـ حتا حـ (الشرقية ١٧) «٨ سم»



١٦ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية في أ

، $\overline{أء} // \overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ب ء حـ) = ٩٠°

، أ ب = ٦ سم ، ب ء = ١٠ سم

أوجد : ظا (∠ أ ء ب) ، طول $\overline{ء حـ}$

(الدقهلية ١٧) «$\frac{٣}{٤}$ ، ٧٫٥ سم»

١٧ أ ب حـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه : $\overline{أء} // \overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٤ سم

، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم أثبت أن : $\frac{٥ \text{ ظا ب حتا حـ}}{\text{حا}^٢ \text{ حـ} + \text{حتا}^٢ \text{ ب}} = ٣$

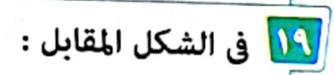
(الوادي الجديد ١٧)

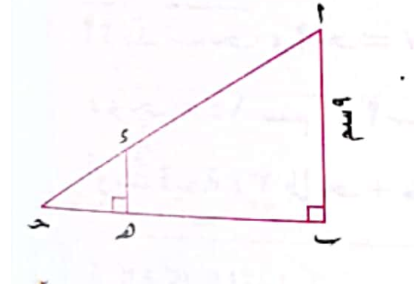
١٨ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أء} // \overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ب) = ٩٠°

، أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم

أثبت أن : حتا (∠ ء حـ ب) − ظا (∠ أ حـ ب) = $\frac{١}{٢}$

(الجيزة ٢٠ ، مطروح ١٨ ، المنوفية ١٧)





١٩ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه :

أ ب = ٩ سم ، ء ∈ $\overline{أحـ}$ ، هـ ∈ $\overline{ب حـ}$

بحيث $\overline{ءهـ} \perp \overline{ب حـ}$ ، ٤ ء هـ = ٣ هـ حـ

احسب : مساحة Δ أ ب حـ

«٥٤ سم^٢»

٢٠ أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، حا $\frac{أ}{٢} = \frac{٤}{٥}$

أوجد : حتا ب بدون استخدام الحاسبة.

(البحر الأحمر ١٣) «$\frac{٤}{٥}$»

٢١ في Δ أ ب حـ القائم الزاوية في حـ أثبت أن : حا ب + حتا ب > ١

٢٢ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، حا أ = ٠٫٦ .

أوجد قيمة : حا أ حتا حـ + حتا أ حا حـ

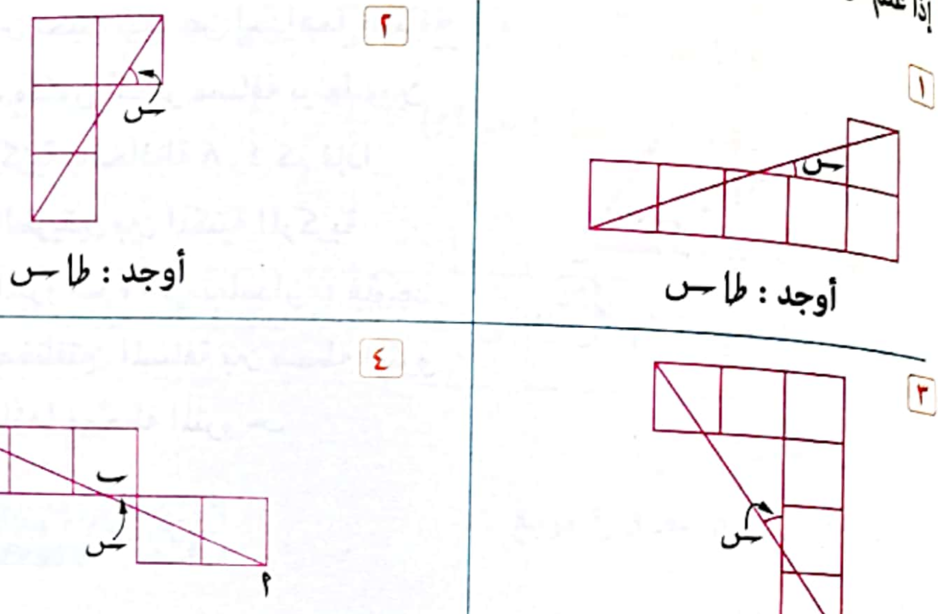
(كفر الشيخ ١٣) «١»

٢٣ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ٧ ظا أ − ٢٤ = ٠ .

أوجد قيمة : ١ − ظا أ حا حـ

«$\frac{١}{٢٥}$»

إذا عُلم أن الأشكال التالية مكونة من مربعات متطابقة فأوجد المطلوب أسفل كل شكل :



١ أوجد : ظا س

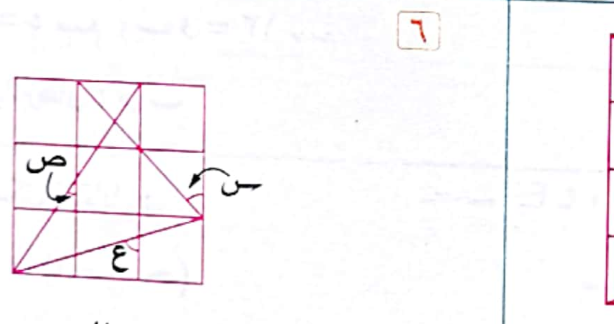
٢ أوجد : ظا س

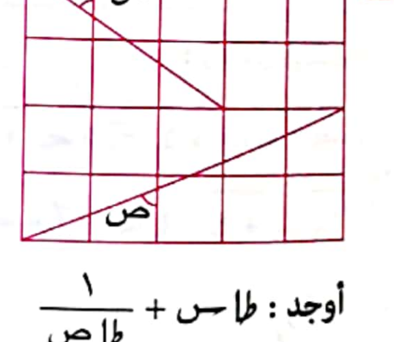
٣ أوجد : حتا س

٤ إذا كانت : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة

أوجد : ظا س





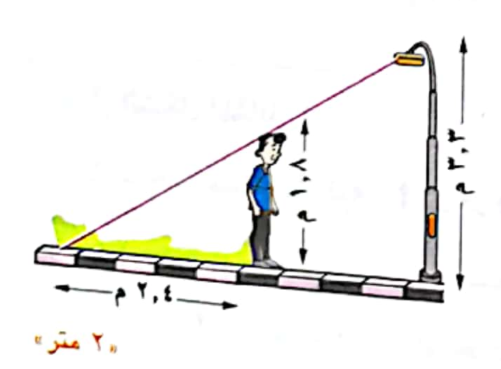


٥ أوجد : ظا س + $\frac{١}{\text{ظا ص}}$

٦ أوجد : ظا س + ظا ص − ظا ع

تطبيقات حياتية

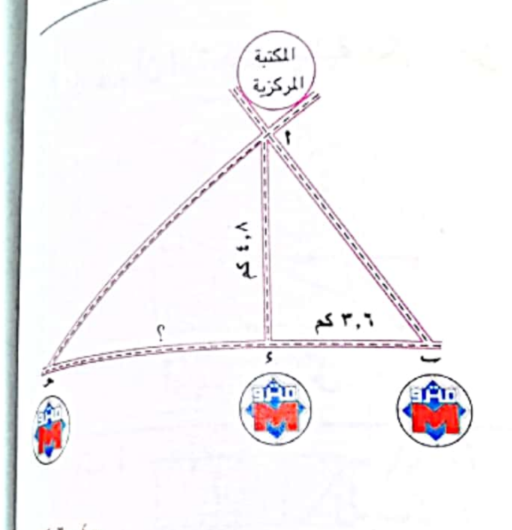
رجل طوله ١,٨ متر يقف أمام عمود إنارة طوله ٣,٢ متر ، فإذا وُجد أن طول ظل الرجل الناتج عن إنارة العمود هو ٢,٤ متر فأوجد بُعد قدم الرجل عن قاعدة العمود.



«٢ متر»



٢٦ يراد إنشاء محطة مترو فى إحدى المحافظات بين محطتين بحيث تبعد عن إحداهما مسافة ٣,٦ كم ، وتكون أقصر مسافة بينها وبين المكتبة المركزية بالمحافظة ٤,٨ كم فإذا علمت أن الطريقين بين المكتبة المركزية ومحطتى المترو ب ، حـ متعامدان ، فأوجد بطريقتين مختلفتين المسافة بين محطة المترو المراد إنشاؤها ومحطة المترو حـ



«٦,٤ كم»



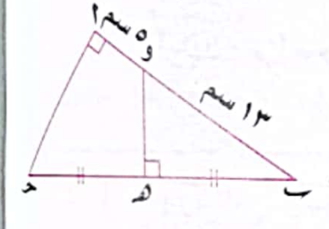
للمتفوقين

٢٧ فى الشكل المقابل :

ق (∠ أ) = ٩٠° ، $\overline{وهـ} \perp \overline{ب حـ}$ ، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

، أ و = ٥ سم ، ب و = ١٣ سم

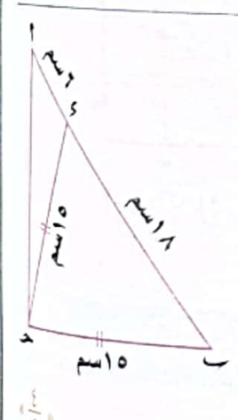
أوجد بالبرهان : طا ب



(دمياط ١٧) «$\frac{٢}{٣}$»

٢٨ من الشكل المقابل :

أوجد : طا (∠ ب أ حـ)



«$\frac{٤}{٥}$»

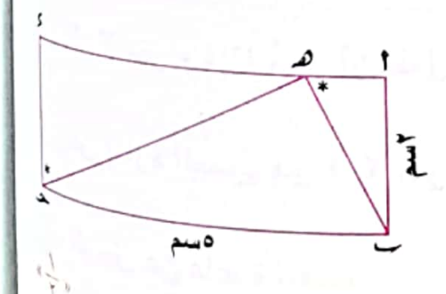
٢٩ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ هـ > هـ ء

، أ ب = ٢ سم ، ب حـ = ٥ سم

، ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ هـ حـ ء)

أوجد : طا (∠ حـ هـ ء)



«$\frac{١}{٢}$»

في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث ، ء $\in$ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث $\overline{\text{ا ء}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ب ء = ٩ سم

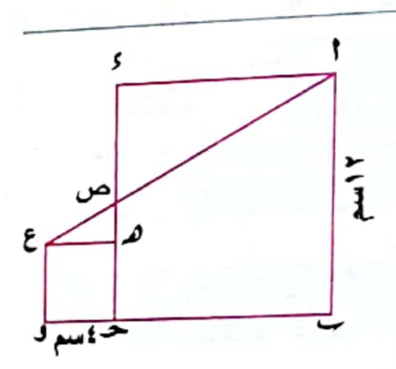
فإذا كان : حا (∠ ب ا ء) = حتا (∠ حـ ا ء) = $\frac{٣}{٥}$

فأوجد : مساحة Δ ا ب حـ

«١٥٠ سم^{٢}»

في أى مثلث ا ب حـ قائم الزاوية فى ب أثبت أن : حا^{٢} ا + حا^{٢} حـ = ١

في الشكل المقابل :



ا ب حـ ء مربع ، هـ حـ و ع مربع

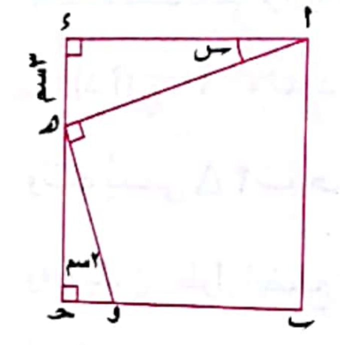
، ا ب = ١٢ سم

، حـ و = ٤ سم

أوجد : ظا (∠ ا ع هـ)

« $\frac{١}{٢}$ »

في الشكل المقابل :



ا ب حـ ء مربع ، هـ $\in$ $\overline{\text{ء حـ}}$ ، و $\in$ $\overline{\text{ب حـ}}$

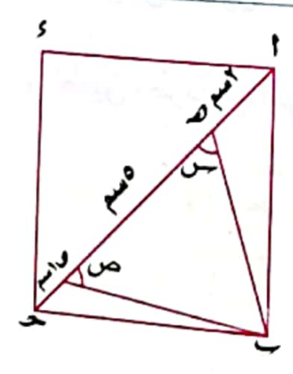
، $\overline{\text{ا هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{هـ و}}$ ، ء هـ = ٣ سم

، و حـ = ٢ سم

أوجد : ظا س

« $\frac{١}{٣}$ »

في الشكل المقابل :



ا ب حـ ء مربع فيه : هـ $\in$ $\overline{\text{ا حـ}}$ ، و $\in$ $\overline{\text{ا حـ}}$

بحيث ا هـ = ٢ سم ، هـ و = ٥ سم

، و حـ = ١ سم

أوجد قيمة : ظا س + ظا ص

« $٣\frac{١}{٢}$ »



الدرس 2

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

النسب المثلثية الأساسية للزاويتين اللتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠°

في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه :

ق(∠أ) = ٦٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°

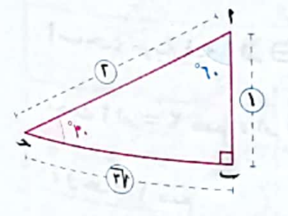
ولذلك يُسمى Δ أ ب جـ «مثلث ثلاثيني ستيني»

وفيه يكون : طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوي نصف طول الوتر

أي أن : أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

وبفرض أن : طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ل وحدة طول فإن : طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ٢ ل وحدة طول

وبتطبيق نظرية فيثاغورس لإيجاد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ نجد أن :



ب جـ = $\sqrt{(\text{أ جـ})^2 - (\text{أ ب})^2}$

= $\sqrt{4\,\text{ل}^2 - \text{ل}^2}$

= $\sqrt{3\,\text{ل}^2} = \sqrt{3}$ ل وحدة طول

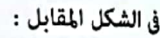
أي أن : أ ب : أ جـ : ب جـ = ل : ٢ ل : $\sqrt{3}$ ل = ١ : ٢ : $\sqrt{3}$

ومن Δ أ ب جـ يمكننا إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزاويتين اللتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠°

كالتالي :

الزاوية	جا	جتا	ظا
٣٠°	جا ٣٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{1}{2}$	جتا ٣٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	ظا ٣٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
٦٠°	جا ٦٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	جتا ٦٠° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{1}{2}$	ظا ٦٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \sqrt{3}$

النسب المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها ٤٥°



في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ متساوي الساقين حيث :

أ جـ = ب جـ = ل وحدة طول ، ق(∠جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٤٥°

وبتطبيق نظرية فيثاغورس لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ نجد أن :

أ ب = $\sqrt{(\text{أ جـ})^2 + (\text{ب جـ})^2}$

= $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ل}^2} = \sqrt{2\,\text{ل}^2} = \sqrt{2}$ ل وحدة طول.

أي أن : أ جـ : ب جـ : أ ب = ل : ل : $\sqrt{2}$ ل = ١ : ١ : $\sqrt{2}$

ومن Δ أ ب جـ يمكننا إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزاوية

التي قياسها ٤٥° كالتالي :

الزاوية	جا	جتا	ظا
٤٥°	جا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$	جتا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$	ظا ٤٥° = ١

* والجدول التالى يلخص لنا النسب المثلثية الأساسية للزوايا التى قياساتها ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥° :

قياس الزاوية / النسبة المثلثية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
جتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١

مثال ١

أوجد قيمة : جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا² ٣٠° + ٥ ظا ٤٥° − ١٠ جتا² ٤٥°

الحل

المقدار = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 5 \times 1 - 10 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 5 - \frac{10}{2} = 1 + 5 - 5 = 1$

مثال ٢

أثبت أن : جا² ٦٠° + جا² ٤٥° + جا² ٣٠° = جتا² ٣٠° + $\frac{1}{2}$ ظا² ٦٠° − جتا² ٦٠°

الحل

الطرف الأيمن = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

الطرف الأيسر = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

∴ الطرفان متساويان.

حاول بنفسك ١

١) أوجد قيمة : • جتا ٦٠° + جا ٣٠° − ظا ٤٥° • جا² ٣٠° + جا² ٦٠°

٢) أثبت أن : ٢ جا ٣٠° + ٤ جتا ٦٠° = ظا² ٦٠°

مثال ٣

أوجد قيمة س التى تحقق أن :

١) س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠°

٢) ٢ جا س = ظا² ٦٠° − ٢ ظا ٤٥° حيث س زاوية حادة.

الحل

١) ∵ س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠° ∴ س × $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

∴ $\frac{1}{4}$ س = $\frac{3}{4}$ ∴ س = ٣

٢) ∵ ٢ جا س = ظا² ٦٠° − ٢ ظا ٤٥°

∴ ٢ جا س = $\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times 1 = 3 - 2 = 1$

∴ جا س = $\frac{1}{2}$ ∴ س = ٣٠°

حاول بنفسك ٢

أوجد قيمة س التى تحقق أن :

١) س جتا ٣٠° = ظا ٦٠°

٢) ظا س = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ − ظا² ٣٠°}}$ حيث س زاوية حادة.

استخدام حاسبة الجيب

أولاً إيجاد النسب المثلثية الأساسية لزاوية معلومة

* فى حاسبة الجيب توجد ثلاثة مفاتيح : sin ، cos ، tan

١) المفتاح sin ويعنى الجيب (جا)

٢) المفتاح cos ويعنى جيب التمام (جتا)

٣) المفتاح tan ويعنى الظل (ظا)

وباستخدام هذه المفاتيح يمكن إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأى زاوية معلوم قياسها.



مثال ٤

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية :

١ جا ٣٦° ٢ جتا ٧٢° ٣٥َ ٣ ظا ٥٠° ٤٦َ ٢٥ً

الحل

١ استخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار : sin 3 6 =

∴ جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨

٢ استخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار : cos 7 2 °''' 3 5 °''' =

∴ جتا ٧٢° ٣٥َ ≃ ٠,٢٩٩٣

٣ استخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار : tan 5 0 °''' 4 6 °''' 2 5 °''' =

∴ ظا ٥٠° ٤٦َ ٢٥ً ≃ ١,٢٢٥٠

حاول بنفسك ٣

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

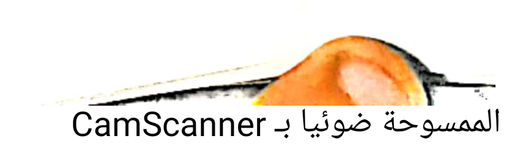
١ جا ٣٥° ١٢َ ٢ ظا ٥٨° ٢٤َ

ثانيًا إيجاد قياس زاوية إذا علمت إحدى نسبها المثلثية

* إذا قيل إن : جا هـ = ٠,٦٢١٨ فإن هـ هو قياس الزاوية التى جيبها ٠,٦٢١٨

، ولإيجاد قيمة هذه الزاوية فإننا نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع التالى من اليسار : SHIFT sin . 6 2 1 8 = °'''

فنجد أن قياس الزاوية يساوى تقريبًا ٣٨° ٢٦َ ٥٢ً



مثال ٥

أوجد هـ فى كل مما يأتى حيث هـ قياس زاوية حادة :

١ جا هـ = ٠,٨ ٢ جتا هـ = ٠,٧١٥٢ ٣ ظا هـ = ١,٥١٥٦

الحل

١ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار : SHIFT sin . 8 = °'''

∴ هـ ≃ ٥٣° ٧َ ٤٨ً

٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار : SHIFT cos . 7 1 5 2 = °'''

∴ هـ ≃ ٤٤° ٢٠َ ٢٥ً

٣ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار : SHIFT tan 1 . 5 1 5 6 = °'''

∴ هـ ≃ ٥٦° ٣٤َ ٥٩ً

حاول بنفسك ٤

باستخدام حاسبة الجيب أوجد هـ حيث هـ قياس زاوية حادة :

١ جا هـ = ٠,٣٩٤٥ ٢ جتا هـ = ٠,٣٨٢٤

مثال ٦

فى الشكل المقابل :

أ ب ج د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، أ ج = ١٣ سم

أوجد : ١ ق(∠ د أ ج)

٢ مساحة المستطيل أ ب ج د لأقرب رقم عشرى واحد.

الحـــل

$\because$ أ ب حـ ء مستطيل $\quad \therefore$ ق (ـدب) $= 90^\circ$

فى Δ أ ب حـ : حا (ـد أ حـ ب) $= \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{6}{13}$

وباستخدام حاسبة الجيب :

$\therefore$ ق (ـد أ حـ ب) $\simeq 11^\circ\ 29'\ 27''$ (المطلوب أولًا)

، $\because$ حتا (ـد أ حـ ب) $= \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

$\therefore$ حتا $11^\circ\ 29'\ 27'' = \frac{\text{ب حـ}}{13}$

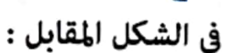
$\therefore$ ب حـ $= 13 \times$ حتا $11^\circ\ 29'\ 27''$

$\therefore$ مساحة المستطيل أ ب حـ ء $=$ أ ب $\times$ ب حـ $= 6 \times 13 \times$ حتا $11^\circ\ 29'\ 27''$

$\simeq 69,2$ سم^2 (المطلوب ثانيًا)

لاحظ أنه

يمكن أيضًا إيجاد طول $\overline{\text{ب حـ}}$ باستخدام نظرية فيثاغورس فى Δ أ ب حـ

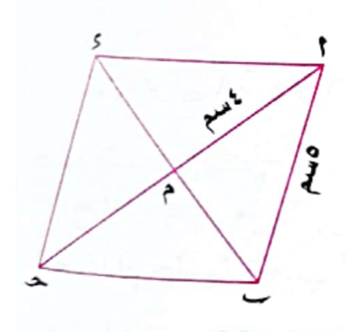


فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء معين قطراه متقاطعان فى م

فإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ م = ٤ سم

فأوجد : [١] ق (ـد ب أ ء) [٢] مساحة المعين أ ب حـ ء





تمارين 2

على النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا



اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد كلًّا مما يأتى :

١ $\text{حا } ٤٥^\circ - \text{حتا } ٤٥^\circ$

٢ $\text{حتا } ٦٠^\circ + \text{حا } ٣٠^\circ$

٣ $\text{حا } ٣٠^\circ + \text{حتا } ٦٠^\circ - \text{طا } ٤٥^\circ$

٤ $\text{حا } ٦٠^\circ + \text{حتا } ٣٠^\circ + \text{طا } ٦٠^\circ$

٥ $\text{حا}^٢ \, ٤٥^\circ + \text{حتا}^٢ \, ٤٥^\circ$

٦ $٤ \text{ حتا } ٣٠^\circ \text{ طا } ٦٠^\circ$

٧ $\text{طا}^٢ \, ٦٠^\circ - ٢ \text{ حا } ٤٥^\circ \text{ حتا } ٤٥^\circ$ (ش. سيناء ١٧)

٨ $\text{حا}^٢ \, ٦٠^\circ - \text{طا } ٦٠^\circ \text{ حتا } ٣٠^\circ + \text{حتا } ٦٠^\circ \text{ حا } ٣٠^\circ$ (أسيوط ١٧)

٩ $٢ \text{ حا } ٣٠^\circ \text{ حتا } ٦٠^\circ + \sqrt{٢} \text{ حا } ٤٥^\circ$

١٠ $(\text{حتا } ٣٠^\circ - \text{حتا } ٦٠^\circ)(\text{حا } ٣٠^\circ + \text{حا } ٦٠^\circ)$

١١ $\frac{\text{حا } ٣٠^\circ}{\text{حتا } ٦٠^\circ} - \text{حتا } ٣٠^\circ \text{ حا } ٦٠^\circ$ (الإسماعيلية ١٧)

١٢ $\frac{\text{حتا}^٢ \, ٦٠^\circ + \text{حتا}^٢ \, ٣٠^\circ + \text{طا}^٢ \, ٤٥^\circ}{\text{حا } ٦٠^\circ \text{ طا } ٦٠^\circ - \text{حا } ٣٠^\circ}$ (الغربية ١٧)

---

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت كلًّا مما يأتى :

١ $\text{حا } ٦٠^\circ = ٢ \text{ حا } ٣٠^\circ \text{ حتا } ٣٠^\circ$ (ش. سيناء ٢٠، الجيزة ١٩، سوهاج ١٨)

٢ $\text{حتا } ٦٠^\circ = ٢ \text{ حتا}^٢ \, ٣٠^\circ - ١$ (ج. سيناء ٢٠، ش. سيناء ١٩، بورسعيد ١٨)

٣ $٢ \text{ حتا}^٢ \, ٣٠^\circ - ١ = ١ - ٢ \text{ حا}^٢ \, ٣٠^\circ$ (الشرقية ١٥)

٤ $\text{حتا } ٦٠^\circ = \text{حتا}^٢ \, ٣٠^\circ - \text{حا}^٢ \, ٣٠^\circ$ (ج. سيناء ١٩، الفيوم ١٨، الإسكندرية ١٧)

٥ $\text{طا } ٦٠^\circ = \frac{٢ \text{ طا } ٣٠^\circ}{١ - \text{طا}^٢ \, ٣٠^\circ}$ (الإسكندرية ٢٠، دمياط ١٩، مطروح ١٧)

٦ $\text{حتا}^٢ \, ٦٠^\circ = ٥ \text{ حا}^٢ \, ٣٠^\circ - \text{طا}^٢ \, ٤٥^\circ$ (السويس ١٧، المنيا ١٤، كفر الشيخ ١١)

[٧] $حا^{٢}$ ٣٠° = ٩ $حتا^{٢}$ ٦٠° − طا ٤٥° (الأقصر ١٧)

[٨] $\frac{حا ٣٠° حتا ٤٥° + حا ٤٥° حتا ٣٠°}{حا ٤٥° حتا ٦٠° + حتا ٤٥° حا ٦٠°}$ = $طا^{٢}$ ٤٥°

[٩] حا ٣٠° = $\sqrt{\frac{١ - حتا ٦٠°}{٢}}$

[٣] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : حتا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ... (القاهرة ١٣)

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

[٢] إذا كانت : حا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ... (القاهرة ٢٠)

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

[٣] إذا كانت : طا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ حيث س زاوية حادة فإن : طا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٣

[٤] إذا كانت : حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن : حا ٢ س = ...

(البحر الأحمر ١٩ ، الغربية ١٨)

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

[٥] إذا كان : ٢ حا س = طا ٦٠° حيث س قياس زاوية حادة

فإن : ق (∠ س) = ... (سوهاج ١١)

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٤٠°

[٦] إذا كان : طا ٣ س = $\sqrt{٣}$ حيث ٣ س زاوية حادة

فإن : ق (∠ س) = ... (ش. سيناء ٢٠ ، الإسماعيلية ١٥)

(أ) ٢٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

[٧] إذا كان : حا ٢ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : س = ... (حيث ٢ س زاوية حادة) (الجيزة ١١)

(أ) ٢٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

٨ إذا كان : $\text{جتا} \frac{س}{٢} = \frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٩ إذا كان : جتا (س + ١٠°) = $\frac{١}{٢}$ حيث (س + ١٠°) زاوية حادة

فإن : س = ... (الفيوم ١١)

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٥٠° (د) ٧٠°

١٠ إذا كان : ظا (٢ س − ٥) = ١ حيث س زاوية حادة

فإن : س = ... (الأقصر ٢٠ ، الغربية ١٦)

(أ) ٤٥° (ب) ٣٥° (جـ) ٢٥° (د) ١٥°

١١ إذا كان : جا (س + ٥°) = $\frac{١}{٢}$ حيث (س + ٥°) قياس زاوية حادة

فإن : ظا (س + ٢٠°) = ... (الدقهلية ١١)

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١

١٢ إذا كانت : س ، ص زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢

فإن : جا س + جتا ص = ... (البحيرة ١٥)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١

١٣ فى Δ أ ب حـ إذا كان ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٥

فإن : جتا ب = ... (الغربية ١٦)

(أ) ٠ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

١٤ فى المثلث القائم الزاوية المتساوى الساقين يكون ظل زاويته الحادة

مساويًا .... (الدقهلية ١٦)

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

١٥ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ فيه : ظا ب = ١

فإن : ظا حـ − جا حـ جتا حـ = ... (البحر الأحمر ١٦)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

١٦ إذا كانت النقطة (٤ ، ٦) تحقق المعادلة : ص = س جا ٣٠° + حـ

فإن : حـ = ... (المنوفية ١٦)

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٢

---

٤ أوجد قيمة س في كل مما يأتى :

١ س جا^{٢} ٤٥° = ظا^{٢} ٦٠° (سوهاج ١٧) «٦»

٢ س جا ٣٠° جتا^{٢} ٤٥° = جا^{٢} ٦٠° (أسيوط ٢٠ ، الإسكندرية ١٩ ، ج. سيناء ١٦) «٣»

٣ س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٦٠° = ظا^{٢} ٤٥° − جتا^{٢} ٦٠° «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

٤ ٤ س = جتا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٣٠° ظا^{٢} ٤٥° (السويس ٢٠ ، الفيوم ١٩ ، الإسكندرية ١٧) «$\frac{١}{١٦}$»

---

٥ أوجد قيمة س في كل مما يأتى :

١ ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠° حيث س زاوية حادة. (الجيزة ٢٠ ، الغربية ١٩ ، دمياط ١٨) «٤٥°»

٢ جا س = جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° حيث ٠° < س < ٩٠° (القاهرة ١٧) «٣٠°»

٣ ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° حيث س زاوية حادة. (الجيزة ١٨) «٣٠°»

٤ ٦ جا س جتا ٤٥° جا ٤٥° = ١ − جتا^{٢} ٦٠° حيث ٠° < س < ٩٠° «١٤° ٢٨ ٣٩»

٥ جتا س = $\frac{\text{جا ٦٠° جا ٣٠°}}{\text{ظا ٤٥° جا}^{٢}\text{ ٤٥°}}$ حيث س زاوية حادة. (الدقهلية ١٨) «٣٠°»

٦ جتا (٣ س + ٦°) = جا ٣٠° حيث (٣ س + ٦°) زاوية حادة. «١٨°»

٧ $\sqrt{٣}$ جا س ظا ٣٠° = ظا ٤٥° جتا ٢ س حيث س زاوية حادة. (المنوفية ٢٠) «٣٠°»

---

٦ أوجد هـ في كل مما يأتى حيث هـ قياس زاوية حادة :

١ جا^{٢} ٤٥° = جتا هـ ظا ٣٠° «٣٠°»

٢ جا هـ جا^{٢} ٦٠° = ٣ جا^{٢} ٤٥° جتا^{٢} ٤٥° جتا ٦٠° (بنى سويف ١٩ ، المنوفية ١٧ ، دمياط ١٦) «٣٠°»

٣ ٣ ظا هـ − ٤ جا^{٢} ٣٠° = ٨ جتا^{٢} ٦٠° (بنى سويف ١٨) «٤٥°»

إذا كان : $طا\ س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ حيث س زاوية حادة

أوجد : $حا\ س\ طا \left(\frac{٣\ س}{٢}\right) + حتا\ (٢\ س)$

(دمياط ١٣) «١»

إذا كان : حا س = طا ٣٠° حا ٦٠° حيث س قياس زاوية حادة.

فأوجد قيمة : ٤ حتا س حا س

(القليوبية ٢٠) «$\sqrt{٣}$»

أكمل الجدولين الآتيين حيث الزوايا المستخدمة زوايا حادة :

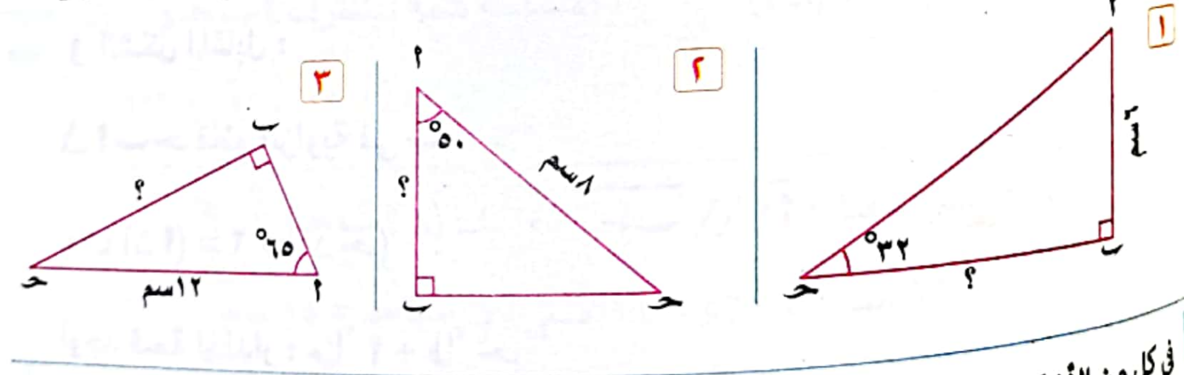
قياس الزاوية / النسبة المثلثية	٣٠°	....	....
حا	....	....	....
حتا	....	$\frac{١}{٢}$	....
طا	....	....	١

بدون استخدام الآلة الحاسبة.

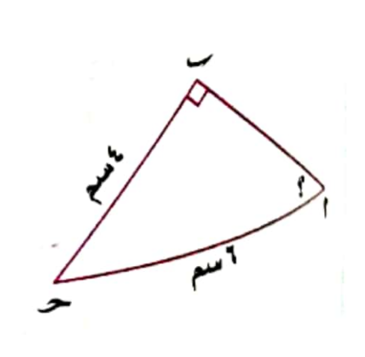
قياس الزاوية / النسبة المثلثية	١٢ ٣٤°	....	....	....
حا	....	....	....	٠,٦
حتا	....	٠,٦٢١٧	....	....
طا	....	....	٢,٢٢٠٣	....

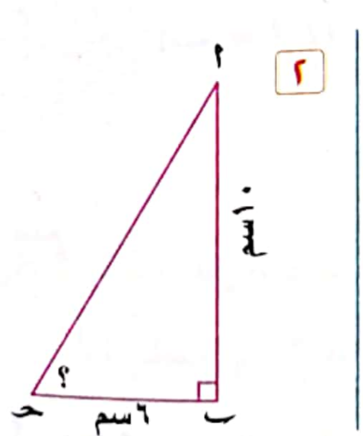
باستخدام الآلة الحاسبة.

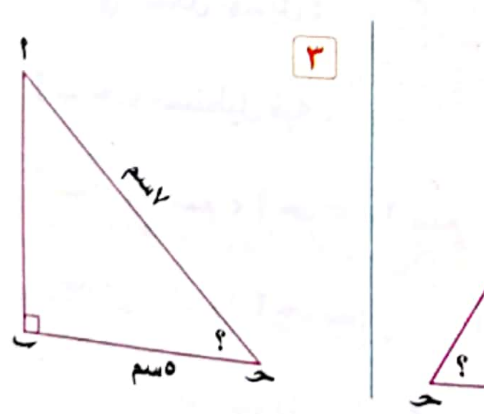
أوجد طول الضلع المشار إليه بالعلامة (؟) فى كل من الأشكال الآتية مقربًا الناتج لرقمين عشريين :



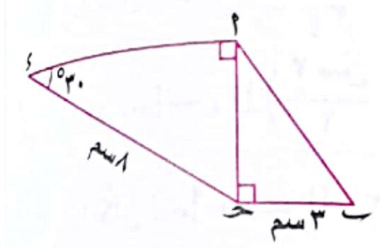
فى كل من الأشكال الآتية أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) بالدرجات والدقائق والثوانى :







١٢ في الشكل المقابل :



ق (∠ ء) = ٣٠° ، ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°

، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ٨ سم

أوجد : [١] طا ب

[٢] ق (∠ ب أ ء)

(الشرقية ١٨) « $\frac{٤}{٣}$ ، ١٢° ٥٢َ ١٢٦° »

---

١٣ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ٧ سم ، ب حـ = ١٠ سم

أوجد : [١] ق (∠ ب)

[٢] مساحة △ أ ب حـ

« ٥٥ً ٢٤َ ٤٤° ، ١٠ $\sqrt{٦}$ سم² »

---

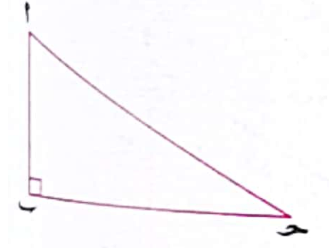
١٤ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٢,٦ سم

، ق (∠ حـ) = ٢٤َ ٨٤° أوجد لأقرب رقم عشرى واحد طول $\overline{\text{ب حـ}}$

« ٢,٥ سم »

---

١٥ في الشكل المقابل :



△ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

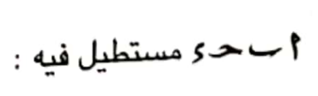
، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ حـ)

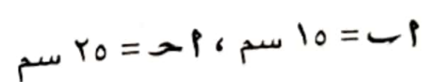
أوجد قيمة المقدار : حا² أ + طا² حـ

(الشرقية ١٣) « $\frac{٧}{١٢}$ »

---

١٦ في الشكل المقابل :


أ ب حـ ء مستطيل فيه :


أ ب = ١٥ سم ، أ حـ = ٢٥ سم

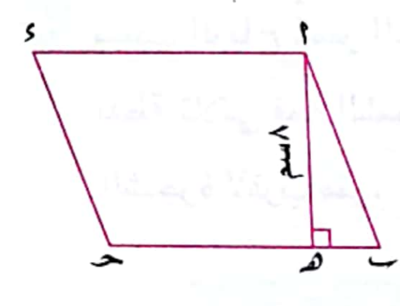
أوجد : [١] ق (∠ أ حـ ب)

[٢] مساحة المستطيل أ ب حـ ء

(الفيوم ٢٠ ، قنا ١٧ ، الإسكندرية ١٦) « ١٢َ ٥٢َ ٣٦° ، ٣٠٠ سم² »

أ ب حـ ء مستطيل طول قطره $\overline{أ حـ}$ = ٢٤ سم ، ق (∠ أ حـ ب) = ٢٥°

أوجد : طول $\overline{ب حـ}$ «٢١,٨ سم»



في الشكل المقابل :

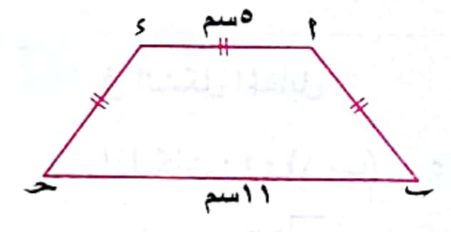
أ ب حـ ء متوازى أضلاع مساحته ٩٦ سم^2

، ب هـ : هـ حـ = ١ : ٣ ، $\overline{أ هـ} \perp \overline{ب حـ}$ ، أ هـ = ٨ سم

أوجد : [١] طول $\overline{أ ء}$ [٢] ق (∠ ب)

[٣] طول $\overline{أ ب}$ لأقرب رقم عشرى واحد. (استخدم أكثر من طريقة)

«١٢ سم ، ٦٩° ٢٦َ ٣٨ً ، ٨,٥ سم»



في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه :

أ ب = أ ء = ء حـ = ٥ سم ، ب حـ = ١١ سم

أوجد : [١] ق (∠ ب) ، ق (∠ أ) [٢] مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء (مطروح ١٣)

«٥٣° ٧َ ٤٨ً ، ١٢٦° ٥٢َ ١٢ً ، ٣٢ سم^2»

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

فإذا كان : أ ب = ١٢ سم ، أ ء = ١٦ سم ، ب حـ = ٢٥ سم

أوجد : [١] طول $\overline{ء حـ}$ [٢] ق (∠ حـ)

[٣] جا (∠ ء حـ ب) − طا (∠ أ حـ ب) «١٥ سم ، ٤٨° ٧َ ٥٣ً ، $\frac{٨}{٢٥}$ »

تطبيقات حياتية

سلم $\overline{أ ب}$ طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوى أ على حائط رأسى وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت حـ هى مسقط أ على سطح الأرض ، وكان قياس زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول $\overline{أ حـ}$ (كفر الشيخ ١٧) «$٣\sqrt{٣}$ متر»

٢٢ يسير شخص فى طريق منحدر يميل على سطح الأرض الأفقى بزاوية قياسها ٢٢° فإذا سار مسافة ٥٠٠ متر فما مقدار ارتفاعه عن سطح الأرض لأقرب متر ؟ «١٨٧ مترًا»

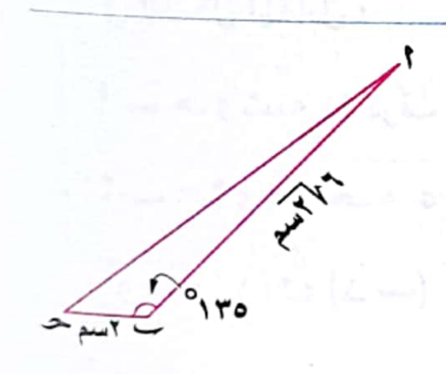
٢٣ بسبب الرياح كُسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° ، إذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة مسافة ٤ أمتار ، أوجد طول الشجرة لأقرب متر. (الفيوم ١٤) «١٥ مترًا»



٢٤ أوجد قيمة هـ حيث هـ زاوية حادة إذا كان :

حاٍ هـ × طا هـ = $\frac{١}{٢}$ «٣٠°»

٢٥ فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ب) = ١٣٥°

، أ ب = ٦ √٢ سم

، ب حـ = ٢ سم

أوجد : طا حـ «$\frac{٣}{٤}$»

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

* إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن :

- حا أ = المقابل / الوتر = ب حـ / أ حـ
- حتا أ = المجاور / الوتر = أ ب / أ حـ
- ظا أ = المقابل / المجاور = ب حـ / أ ب

حا حـ = المقابل / الوتر = أ ب / أ حـ

حتا حـ = المجاور / الوتر = ب حـ / أ حـ

ظا حـ = المقابل / المجاور = أ ب / ب حـ

* ظا أ = حا أ / حتا أ

* إذا كانت : ∠ أ ، ∠ ب زاويتين متتامتين فإن :

حا أ = حتا ب ، حتا أ = حا ب

والعكس صحيح أى أنه :

إذا كانت : ∠ أ ، ∠ ب زاويتين حادتين

وكان : حا أ = حتا ب أو حتا أ = حا ب فإن : ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = $90°$

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

- حا $30°$ = $\frac{1}{2}$
- حتا $30°$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ظا $30°$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

- حا $60°$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- حتا $60°$ = $\frac{1}{2}$
- ظا $60°$ = $\sqrt{3}$

- حا $45°$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- حتا $45°$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ظا $45°$ = 1

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ لأى زاوية حادة أ يكون ظا أ = ...

(أ) $\frac{\text{جتا أ}}{\text{جا أ}}$ (ب) جا أ جتا أ (جـ) $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ (د) جا أ + جتا أ

٢ إذا كانت : جتا س = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث س قياس زاوية حادة. فإن : جا ٢ س = ...

(أ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ب) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (جـ) ١ (د) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

٣ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب حيث : ٣ أ جـ = ٥ ب جـ فإن : ظا أ = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{3}$

٤ إذا كان : جتا (س + ١٥°) = $\frac{1}{2}$ فإن : جا (٧٥° − س) = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (د) ١

٥ إذا كان : س ص ع مثلث متساوى الساقين وقائم الزاوية فى ع

فإن : ظا س = ...

(أ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) ١ (د) $\frac{1}{2}$

٦ فى الشكل المقابل :

إذا كان طول $\overline{\text{ب جـ}}$ هو ل وطول $\overline{\text{أ جـ}}$ هو م

فأى من المعادلات الآتية يمكن استخدامه لإيجاد ل ؟

(أ) ل = $\frac{\text{م}}{\text{جتا هـ}}$ (ب) ل = $\frac{\text{م}}{\text{جا هـ}}$

(جـ) ل = م جتا هـ (د) ل = م جا هـ

٢ (أ) فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ا) = ٩٠°

، ا حـ = ١٢ سم ، ا ب = ٥ سم

أثبت أن : حا حـ حتا ب − حا حـ حا ب = صفر

(ب) أوجد قيمة س :

١ س حا ٣٠° = حا ٣٠° حتا ٦٠° + حتا ٣٠° حا ٦٠°

٢ ٢ حا س = طا٢ ٦٠° − ٢ طا ٤٥° حيث س زاوية حادة.

---

٣ (أ) ا ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه :

ا ء // ب حـ ، ا ء = ٤ سم ، ا ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم

أوجد قيمة : $\frac{\text{طا ب حتا حـ}}{\text{حتا}^2 \text{ حـ} + \text{حا}^2 \text{ حـ}}$

(ب) أوجد قيمة : $\frac{\text{حا ٣٠° حتا ٤٥° + حتا ٣٠° حا ٤٥°}}{\text{حا ٤٥° حتا ٦٠° + حتا ٤٥° حا ٦٠°}}$

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

إذا كان ا ب حـ ء مستطيل فيه :

ا ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم

أوجد : **١** طول ا حـ

٢ قيمة ٥ طا (∠ ا حـ ء) − ١٣ حا (∠ ء ا حـ)

(ب) بسبب الرياح كسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٣٠° ، إذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة مسافة ٣ أمتار ، أوجد طول الشجرة لأقرب متر.

٥ (أ) إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب وكان : حا أ + حتا حـ = ١ أوجد : ق (∠ أ)

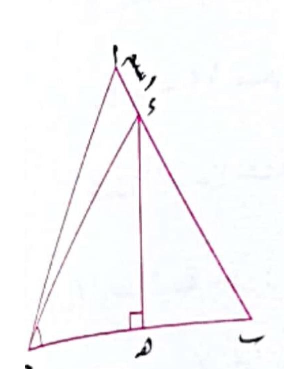
(ب) فى الشكل المقابل :

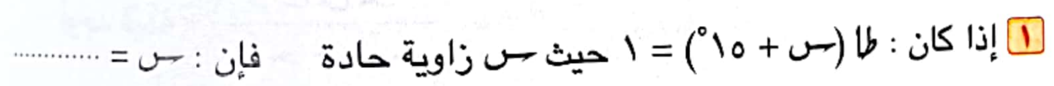
أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٥ سم

، ء ∈ $\overline{أب}$ بحيث أء = ١ سم

، رسم $\overline{ءهـ}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

أوجد : ظا (∠ ء حـ هـ)





أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : ظا (س + ١٥°) = ١ حيث س زاوية حادة فإن : س = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٣٠° (د) ١٥°

٢ إذا كان : حا ٣٠° = حتا هـ حيث هـ زاوية حادة فإن : ق (∠ هـ) = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

٣ إذا كانت : س زاوية حادة ، ٢ حا س − ١ = ٠ فإن : ق (∠ س) = ...

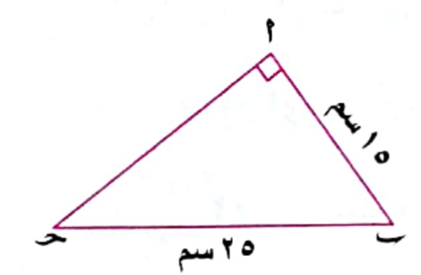
(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

٤ إذا كان : أ ، ب زاويتين متتامتين بحيث أ : ب = ١ : ٢ فإن : حا أ + حتا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١

٥ إذا كان : ق (∠ أ) = ٧٠° ، حا ب = حتا ب فى Δ أ ب حـ فإن : ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٧٠° (د) ٦٥°



١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ) = ٩٠°

، أ ب = ١٥ سم ، ب حـ = ٢٥ سم

فإن : ظا ب = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(أ) أوجد قيمة س بالدرجات إذا كان :

ظا ٢ س = ٤ جا ٣٠° جتا ٣٠° حيث صفر° < س° < ٩٠°

(ب) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين هى ٣ : ٥

فأوجد قياس كل منهما بالدرجات والدقائق.

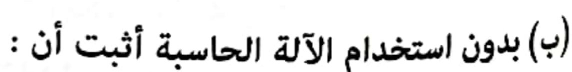
(أ) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم

، ب حـ = ١٢ سم ، $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

أوجد قيمة كل من :

١ جتا ب **٢** ق (∠ ب) **٣** جا (٩٠° - ب)



(ب) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

ظا٢ ٦٠° - ظا٢ ٤٥° = جا٢ ٦٠° + جتا٢ ٦٠° + ٢ جا ٣٠°

---

٤ **(أ)** في الشكل المقابل :

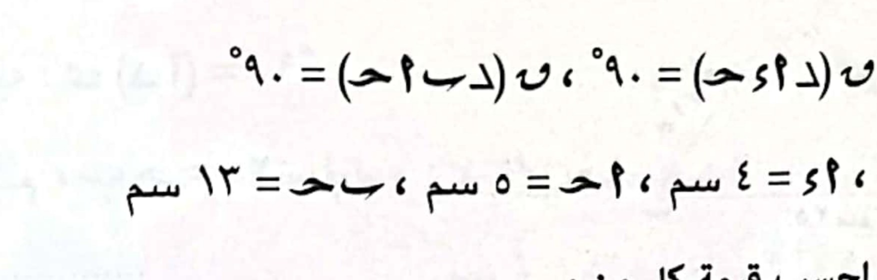
أ ب حـ مثلث متساوى الساقين وقائم الزاوية فى حـ

وطول كل من ساقيه ل وحدة طول أوجد :

١ النسب بين أطوال أضلاع المثلث أ حـ : ب حـ : أ ب

٢ ظا ب ، جا أ

(ب) فى الشكل المقابل :





ق (∠ ا د ح) = ٩٠° ، ق (∠ ب ا ح) = ٩٠°

، ا د = ٤ سم ، ا ح = ٥ سم ، ب ح = ١٣ سم

احسب قيمة كل من :

١ طا (∠ ا ح ب) + طا (∠ د ا ح)

٢ جا (∠ ب) جتا (∠ ح ا د) + جتا (∠ ب) جا (∠ ح ا د)

٥ (أ) ا ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب

١ أثبت أن : جا² ا + جتا² ا = ١

٢ إذا كان : ا ب = ٥ سم ، ا ح = ١٣ سم

أوجد : ق (∠ ح)

(ب) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

جا ٤٥° جتا ٤٥° + ٣ جا ٣٠° جتا ٦٠° − جتا² ٣٠°





أهداف المشروع

- إيجاد قياس زاوية بمعرفة إحدى نسبها المثلثية.
- استخدام نظرية فيثاغورث.
- الربط بين الرياضيات والرياضة.
- الربط بين الرياضيات والتاريخ.
- الربط بين الرياضيات والعلوم.

المطلوب

«تُعد لعبة كرة القدم من الألعاب الجماعية ذات الشعبية المرتفعة حول العالم ، واللعبة الأكثر ممارسة فى غالبية الدول»

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- تكلم عن تاريخ نشأة لعبة كرة القدم، وكيف تطورت عبر العصور.
- اذكر أبعاد ملعب كرة القدم ، وأبعاد المرمى ، وأبعاد منطقة الجزاء.
- كم تبعد نقطة الجزاء عن خط المرمى ؟
- إذا قام أحد اللاعبين بتسديد الكرة من نقطة الجزاء باتجاه المرمى فأصابت الكرة العارضة العلوية فى منتصفها تمامًا، وبفرض أن الحركة تحركت فى مسار خط مستقيم احسب ما يأتى :

١) المسافة التى قطعتها الكرة لترتطم بالعارضة.

٢) قياس الزاوية التى صنعها مسار الكرة مع الأرض.

٣) الفترة التى ينتمى إليها قياس الزاوية التى يصنعها مسار الكرة مع الأرض فى هذه الحالة لتسجل هدفًا.

٤) السرعة المتوسطة التى تحركت بها الكرة إذا ارتطمت بالعارضة بعد ٠,٤ ثانية من لحظة ركلها بقدم اللاعب.

الوحدة

5 الهندسة التحليلية



دروس الوحدة :

مشروع بحثى على الوحدة الخامسة



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يوجد البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى المتعامد.
- يوجد إحداثيى منتصف قطعة مستقيمة.
- يتعرف ميل الخط المستقيم.
- يوجد ميل الخط المستقيم بمعلومية قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.
- يتعرف العلاقة بين ميلى مستقيمين متوازيين.
- يتعرف العلاقة بين ميلى مستقيمين متعامدين.
- يوجد ميل المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات بمعلومية معادلة المستقيم.
- يوجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات.
- يستخدم ميل المستقيم فى حل بعض المشكلات الحياتية.



الدرس 1
البُعد بين نقطتين

* بفرض أن م $(س_1 ، ص_1)$ ، ن $(س_2 ، ص_2)$ نقطتان فى نفس المستوى

فمن هندسة الشكل المقابل نجد أن :

ن ل = ن ب − ل ب = $ص_2 - ص_1$

وبصفة عامة : ن ل = $|ص_2 - ص_1|$

وبالمثل : ل م = ب و − أ و = $س_2 - س_1$

وبصفة عامة : ل م = $|س_2 - س_1|$

∵ Δ ن ل م قائم الزاوية فى ل

∴ $(م ن)^2 = (ل م)^2 + (ل ن)^2$

∴ $(م ن)^2 = (س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2$

∴ $م ن = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

أى أن :

البعد بين النقطتين م ، ن يساوى $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

وتعلم أن : $(س_2 - س_1)^2 = (س_1 - س_2)^2$

وبالمثل : $(ص_2 - ص_1)^2 = (ص_1 - ص_2)^2$

وعلى هذا فإن : البعد بين النقطتين م ، ن يساوى أيضًا $\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$

وبصفة عامة :

البُعد بين أى نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

مثال ①

إذا كانت : أ (٣ ، ٦) ، ب (−١ ، ٤) فأوجد : طول $\overline{أب}$

الحل

$أب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2} = \sqrt{(-١ - ٣)^2 + (٤ - ٦)^2}$

$= \sqrt{(-٤)^2 + (-٢)^2} = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

حل آخر :

$أب = \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2} = \sqrt{(٣ - (-١))^2 + (٦ - ٤)^2}$

$= \sqrt{٤^2 + ٢^2} = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول.

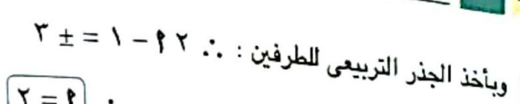
مثال ②

إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٥) ، (٣أ − ١ ، ١) يساوى ٥ وحدة طول فأوجد قيمة أ

الحل

∵ $\sqrt{(٣أ - ١ - أ)^2 + (١ - ٥)^2} = ٥$ ∴ $\sqrt{(٢أ - ١)^2 + (-٤)^2} = ٥$

وبتربيع الطرفين : ∴ $(٢أ - ١)^2 + ١٦ = ٢٥$ ∴ $(٢أ - ١)^2 = ٩$



وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين : ∴ $٢أ - ١ = \pm ٣$

∴ $٢أ - ١ = ٣$ ومنها $٢أ = ٤$ ∴ $أ = ٢$

أو $٢أ - ١ = -٣$ ومنها $٢أ = -٢$ ∴ $أ = -١$

حاول بنفسك ١

إذا كانت : أ(٢ ، ٥) ، ب(−١ ، ١) فأوجد طول $\overline{أب}$

مثال ٣

إذا كان أ ب ح مثلثًا حيث أ(٠ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، ح(−٤ ، ٣)

أوجد محيط Δ أ ب ح

الحل

∵ محيط Δ أ ب ح = أ ب + ب ح + ح أ

، $أب = \sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٤ - ٠)^٢}$

$= \sqrt{٣^٢ + ٤^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

، $ب ح = \sqrt{(-٤ - ٣)^٢ + (٣ - ٤)^٢}$

$= \sqrt{(-٧)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٤٩ + ١} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

، $ح أ = \sqrt{(-٤)^٢ + (٣)^٢}$ «بناءً على الملاحظة الجانبية السابقة»

$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

∴ محيط Δ أ ب ح $= ٥ + ٥\sqrt{٢} + ٥ = (١٠ + ٥\sqrt{٢})$ وحدة طول

> **لاحظ أن**
>
> بُعد أي نقطة م (س ، ص) عن نقطة الأصل و (٠ ، ٠) هو و م $= \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

مثال ٤

أثبت أن Δ أ ب ح متساوي الأضلاع حيث : أ(٦ ، ٠) ، ب(٢ ، ٠) ، ح(٤ ، ٢$\sqrt{٣}$) ثم أوجد مساحته.

ح(٤ ، ٢$\sqrt{٣}$)

ب(٢ ، ٠) م أ(٦ ، ٠)

رسم توضيحي

الحل

∵ $أب = \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٠ - ٠)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

، $ب ح = \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (٠ - ٢\sqrt{٣})^٢}$

$= \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

، $أ ح = \sqrt{(٦ - ٤)^٢ + (٠ - ٢\sqrt{٣})^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

∵ أب = ب ح = أ ح ∴ Δ أ ب ح متساوي الأضلاع

بفرض أن م منتصف القاعدة $\overline{أب}$ ∴ $\overline{ح م} \perp \overline{أب}$

∴ باستخدام نظرية فيثاغورس نجد أن :

الارتفاع م ح $= \sqrt{(أ ح)^٢ - (أ م)^٢} = \sqrt{٤^٢ - ٢^٢} = \sqrt{١٢} = ٢\sqrt{٣}$ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ب ح $= \frac{١}{٢}$ أب × م ح $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢\sqrt{٣} = ٤\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

حاول بنفسك ٢

أثبت أن Δ أ ب ح متساوي الساقين حيث : أ(٣ ، ٢) ، ب(٥ ، ٩) ، ح(−١ ، ٧)

> **ملاحظة ١**
>
> لإثبات أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة يمكن إيجاد البعد بين كل نقطتين من هذه النقاط ثم إثبات أن أكبر بعد يساوي مجموع البعدين الآخرين.

مثال ٥

أثبت أن النقط : أ(−٢ ، ٧) ، ب(−٣ ، ٤) ، ح(١ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة.

الحل

∵ $أب = \sqrt{(-٢ + ٣)^٢ + (٧ - ٤)^٢} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(-٣ - ١)^{٢} + (٤ - ١٦)^{٢}} = \sqrt{١٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٠} = ٤\sqrt{١٠}$ وحدة طول

، أ حـ = $\sqrt{(-٢ - ١)^{٢} + (٧ - ١٦)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٨١} = \sqrt{٩٠} = ٣\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ ب حـ = أ ب + أ حـ ∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

ملاحظة ٢

- لإثبات أن النقط أ ، ب ، حـ هى رءوس مثلث يمكن إيجاد أ ب ، ب حـ ، أ حـ ثم إثبات أن مجموع طولى أصغر ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.
- لتعيين نوع المثلث أ ب حـ حسب زواياه حيث $\overline{\text{أ حـ}}$ أطول الأضلاع :

نقارن بين $(\text{أ حـ})^{٢}$ ، $(\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$ كما يلى :

١ إذا كان : $(\text{أ حـ})^{٢} > (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$ فإن المثلث منفرج الزاوية فى ب

٢ إذا كان : $(\text{أ حـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$ فإن المثلث قائم الزاوية فى ب

٣ إذا كان : $(\text{أ حـ})^{٢} < (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢}$ فإن المثلث حاد الزوايا.

مثال ٦

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه : أ (٣ ، ٢) ، ب (-٤ ، ١) ، حـ (٢ ، -١) قائم الزاوية وأوجد مساحته.

الحل

∵ أ ب = $\sqrt{(٣ + ٤)^{٢} + (٢ - ١)^{٢}} = \sqrt{٤٩ + ١} = \sqrt{٥٠}$ وحدة طول.

، ب حـ = $\sqrt{(-٤ - ٢)^{٢} + (١ + ١)^{٢}} = \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠}$ وحدة طول.

، أ حـ = $\sqrt{(٣ - ٢)^{٢} + (٢ + ١)^{٢}} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول.

، ∵ $(\text{أ حـ})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢} = ١٠ + ٤٠ = ٥٠$ ، $(\text{أ ب})^{٢} = ٥٠$

∴ $(\text{أ حـ})^{٢} + (\text{ب حـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢}$ ∴ المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × أ حـ × ب حـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠} \times \sqrt{٤٠}$

= $\frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠} \times ٢\sqrt{١٠} = ١٠$ وحدة مربعة.

حاول بنفسك ٣

إذا كانت : أ (-١ ، -١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠)

أثبت أن : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحته.

ملاحظة ٣

إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا :

١ لإثبات أن أ ب حـ ء متوازى أضلاع نثبت أن : أ ب = حـ ء ، ب حـ = ء أ

٢ لإثبات أن أ ب حـ ء معين نثبت أن : أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ

٣ لإثبات أن أ ب حـ ء مستطيل نثبت أن : أ ب = حـ ء ، ب حـ = ء أ ، أ حـ = ب ء

٤ لإثبات أن أ ب حـ ء مربع نثبت أن : أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ ، أ حـ = ب ء

مثال ٧

إذا كان : أ (٣ ، -٢) ، ب (-٥ ، ٠) ، حـ (٠ ، -٧) ، ء (٨ ، -٩)

أثبت أن : أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

الحل

∵ أ ب = $\sqrt{(٣ + ٥)^{٢} + (-٢ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٦٤ + ٤} = \sqrt{٦٨}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(-٥ - ٠)^{٢} + (٠ + ٧)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ٤٩} = \sqrt{٧٤}$ وحدة طول

، حـ ء = $\sqrt{(٠ - ٨)^{٢} + (-٧ + ٩)^{٢}} = \sqrt{٦٤ + ٤} = \sqrt{٦٨}$ وحدة طول

، ء أ = $\sqrt{(٨ - ٣)^{٢} + (-٩ + ٢)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ٤٩} = \sqrt{٧٤}$ وحدة طول

∴ أ ب = حـ ء ، ب حـ = ء أ ∴ أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

مثال ٨

أثبت أن النقط: أ(−١ ، ٤) ، ب(١ ، ١) ، حـ(−١ ، −٢) ، ء(−٣ ، ١) هي رءوس معين ومثله بيانيًا ثم أوجد مساحته.

الحل

∵ أ ب = $\sqrt{(-١-١)^٢+(٤-١)^٢}$

= $\sqrt{٤+٩}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(١+١)^٢+(١+٢)^٢}$

= $\sqrt{٤+٩}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول

، حـ ء = $\sqrt{(-١+٣)^٢+(-٢-١)^٢}$

= $\sqrt{٤+٩}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول

، ء أ = $\sqrt{(-٣+١)^٢+(١-٤)^٢}$

= $\sqrt{٤+٩}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

∴ أ ب = ب حـ = حـ ء = ء أ

∴ الشكل أ ب حـ ء معين

، ∵ أ حـ = $\sqrt{(-١+١)^٢+(٤+٢)^٢}$ = $\sqrt{٠+٣٦}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ وحدة طول

، ب ء = $\sqrt{(١+٣)^٢+(١-١)^٢}$ = $\sqrt{١٦+٠}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدة طول

∴ مساحة المعين أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة.

حاول بنفسك ٤

أثبت أن النقط: أ(−١ ، ٣) ، ب(٥ ، ١) ، حـ(٦ ، ٤) ، ء(٠ ، ٦) هي رءوس مستطيل ثم احسب مساحته.

ملاحظة ٤

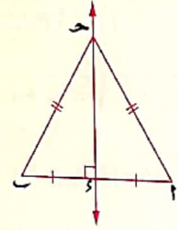
- محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودي عليها من منتصفها.
- أي نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها والعكس صحيح.

أي أنه: إذا كانت هناك نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور هذه القطعة المستقيمة.

فمثلاً: في الشكل المقابل:

إذا كان: حـ أ = حـ ب

فإن: حـ ∈ محور تماثل $\overline{أ ب}$



مثال ٩

إذا كان: أ(١ ، −١) ، ب(١ ، ٣)

فأثبت أن: النقطة حـ(−١ ، ١) تقع على محور تماثل $\overline{أ ب}$

الحل

∵ حـ أ = $\sqrt{(-١-١)^٢+(١+١)^٢}$ = $\sqrt{٤+٤}$ = $\sqrt{٨}$ = ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

، ∵ حـ ب = $\sqrt{(-١-١)^٢+(١-٣)^٢}$ = $\sqrt{٤+٤}$ = $\sqrt{٨}$ = ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ حـ أ = حـ ب ∴ حـ تقع على محور تماثل $\overline{أ ب}$

ملاحظة ٥

- لإثبات أن ثلاث نقاط مثل أ ، ب ، حـ تقع على دائرة واحدة وليكن مركزها م نثبت أن: م أ = م ب = م حـ
- إذا كانت أ ∈ الدائرة م فإن: طول نصف قطر الدائرة (نق) = م أ
- تذكر أن: * محيط الدائرة = ٢ π نق   * مساحة الدائرة = π نق²

مثال ١٠

أثبت أن النقط : أ (–٦ ، ٢) ، ب (٠ ، ٨) ، حـ (–٨ ، ٤) تقع على الدائرة التى مركزها م (–٤ ، ٦) وأوجد مساحتها حيث $\pi \approx ٣,١٤$

الحـــل

∵ م أ $= \sqrt{(-٦+٤)^{٢} + (٢-٦)^{٢}} = \sqrt{٤+١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

، م ب $= \sqrt{(٠+٤)^{٢} + (٨-٦)^{٢}} = \sqrt{١٦+٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

، م حـ $= \sqrt{(-٨+٤)^{٢} + (٤-٦)^{٢}} = \sqrt{١٦+٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ م أ = م ب = م حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة م التى طول نصف قطرها نق $= ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

∴ مساحة الدائرة م $= \pi$ نق$^{٢} \approx ٣,١٤ \times (٢\sqrt{٥})^{٢} \approx ٦٢,٨$ وحدة مربعة.

حاول بنفسك ٥

أثبت أن النقط : أ (–٢ ، ٠) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، –٦) تمر بها دائرة مركزها م (٢ ، –٣) ثم أوجد محيط الدائرة بدلالة π





تمارين على البعد بين نقطتين





أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد طول $\overline{\text{ا ب}}$ فى كل من الحالات الآتية :

١ ا(١ ، ٢) ، ب(٤ ، ٦)

٢ ا(٢ ، −١) ، ب(٥ ، −٥)

٣ ا(−٢ ، ٧) ، ب(٣ ، −٥)

٤ ا(−٢ ، ٥) ، ب(٣ ، ٠)

٥ ا(١٥ ، ٠) ، ب(٦ ، ٠)

٦ ا(٦ ، ٠) ، ب(٠ ، −٨)

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ البعد بين النقطتين (٣ ، ا) ، (−١ ، ا) هو .... وحدة طول. (الإسماعيلية ١٧)

(أ) ١٦ (ب) ٩ (جـ) ٥ (د) ٤

٢ البعد بين النقطة ($\sqrt{٣}$ ، ١) ونقطة الأصل هو .... وحدة طول. (سوهاج ١٨)

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

٣ إذا كان البعد بين النقطتين (ا ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة طول واحدة

فإن : ا = ... (الغربية ٢٠)

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٢

٤ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) يساوى ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٢,٥ (د) ٢٥

٥ إذا كان : ا ب حـ ء مربع وكان : ا (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٢)

فإن مساحة المربع ا ب حـ ء = ... وحدة مساحة.

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) ٤ $\sqrt{١٠}$ (د) ٤٠

٦ إذا كان : ا ب حـ ء معين وكان : ا (−١ ، ٧) ، ب (−٣ ، ١)

فإن محيط المعين ا ب حـ ء = ... وحدة طول.

(أ) ٤٠ (ب) ٤ $\sqrt{٥٢}$ (جـ) ٨ $\sqrt{١٠}$ (د) ٢ $\sqrt{١٠}$

٧ في مستوى إحداثي متعامد النقطة التي تبعد عن نقطة الأصل مسافة ٢ وحدة طول يمكن أن تكون .... (القاهرة ٠٩)

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٠ ، ٢) (د) (−٣ ، ٥)

٨ بعد النقطة (−٥ ، −٢) عن محور الصادات يساوي .... وحدة طول. (الغربية ١٦)

(أ) −٥ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٥

٩ البعد بين النقطة (٥ ، طا^{٢} ٦٠°) ومحور السينات هو .... وحدة طول. (السويس ١٧)

(أ) ٥ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) ٣ (د) $\sqrt{٣}$

١٠ بعد النقطة (ل ، −٤) عن محور الصادات يساوي .... حيث ل ∈ ح (دمياط ١٨)

(أ) ٤ (ب) ل (جـ) −٤ (د) |ل|

١١ البعد بين المستقيمين : ص − ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠

يساوي .... وحدة طول. (الفيوم ١٧ ، الإسكندرية ١٧)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٣

١٢ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول ، فأي من النقط الآتية تنتمي للدائرة ؟ (البحيرة ١٧ ، بني سويف ١٦ ، الغربية ١٤)

(أ) (١ ، ٢) (ب) (−٢ ، ١) (جـ) ($\sqrt{٣}$ ، ١) (د) ($\sqrt{٢}$ ، ١)

٣ إذا كانت : أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ٢) ، حـ (٥ ، ٤)

فأثبت أن : ب حـ = ٢ أ ب (الأقصر ١٦)

٤ أثبت أن النقط : أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، حـ (−٥ ، −٣)

تقع على استقامة واحدة. (الفيوم ١٧ ، كفر الشيخ ١٥ ، أسيوط ١٤)

٥ إذا كانت : أ (−٢ ، ٢) ...

٦ بيِّن أى مجموعات النقط التالية تقع على استقامة واحدة :

(القاهرة ٠٨)

١ أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، −٢) ، حـ (−٣ ، ١٦)

٢ أ (٧ ، ٠) ، ب (−٣ ، ٦) ، حـ (٢٢ ، ٩)

٣ أ (−١ ، ٤) ، ب (٣ ، −١٤) ، حـ (−٥ ، −٦)

٧ بيِّن نوع المثلث أ ب حـ حيث أ (−٢ ، ٤) ، ب (٣ ، −١) ، حـ (٤ ، ٥) بالنسبة لأطوال أضلاعه.

(البحيرة ٢٠ ، دمياط ١٩ ، الجيزة ١٧ ، الوادى الجديد ١٦)

٨ بيِّن نوع كل مثلث من المثلثات الآتية بالنسبة لزواياه :

١ أ (٢ ، ١) ، ب (٤ ، −٢) ، حـ (٧ ، ٥)

٢ أ (٣ ، ٥) ، ب (−١ ، ١) ، حـ (٥ ، −٥)

٣ أ (٤ ، ٤) ، ب (٣ ، −١) ، حـ (−٢ ، ٤)

٤ أ (٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٨)

٥ 📖 أ (١ ، −١) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (−٣ ، −٢)

٩ 📖 أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٥ ، −٥) ، ب (−١ ، ٧) ، حـ (١٥ ، ١٥) قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحته.

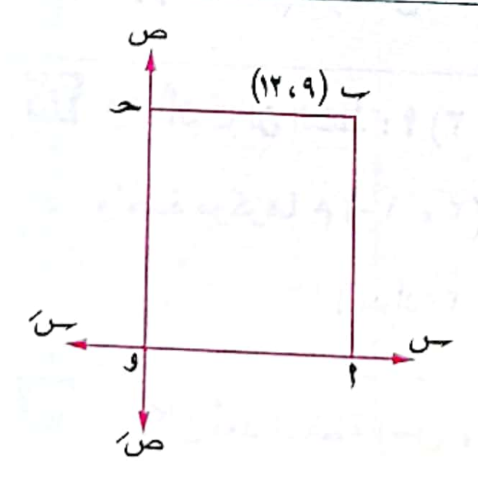
(قنا ١٦ ، المنوفية ١٤) «١٢٠ وحدة مربعة»

١٠ إذا كانت النقط : أ (٥ ، ٠) ، ب $(٧ ، ٢\sqrt{٣})$ ، حـ $(٣ ، ٢\sqrt{٣})$ ثلاث نقط فى مستوى إحداثى متعامد فأثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع وأوجد مساحته. «$٤\sqrt{٣}$ وحدة مربعة»

١١ فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ و مستطيل

فأوجد : طول $\overline{\text{أ حـ}}$



«١٥ وحدة طول»

١٢ في كل مما يأتي أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ ، ء رءوس متوازي أضلاع :

١ أ (−١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، حـ (٥ ، ٦) ، ء (٤ ، ٢) (السويس ١١)

٢ أ (−٢ ، ٤) ، ب (٥ ، −٣) ، حـ (٧ ، ١) ، ء (٠ ، ٨) (سوهاج ٠٨)

١٣ أثبت أن النقط : أ (٠ ، ١) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (١ ، ٨) ، ء (−٣ ، ٤)

هي رءوس لمستطيل ثم احسب طول قطره. (سوهاج ٠٩) «٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول»

١٤ أثبت أن النقط : أ (٣ ، ٣) ، ب (٠ ، ٣) ، حـ (٠ ، ٠) ، ء (٣ ، ٠) الواقعة

في مستوى إحداثي متعامد هي رءوس مربع واحسب طول قطره ومساحته. (الأقصر ٠٩)

«٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طول ، ٩ وحدات مربعة»

١٥ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، −٢) ، حـ (١ ، −١)

، ء (٠ ، ٤) أثبت أن الشكل أ ب حـ ء معين ثم أوجد مساحته. (قنا ١٩) «٢٤ وحدة مربعة»

١٦ أثبت أن النقط : أ (−٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (−٤ ، ٢) ليست على استقامة

واحدة ، وإذا كانت ء (−٩ ، ٤) فأثبت أن الشكل أ ب حـ ء متوازي أضلاع. (بورسعيد ١٧)

١٧ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ (٢ ، ٤) ، ب (−٣ ، ٠) ، حـ (−٧ ، ٥)

، ء (−٢ ، ٩) أثبت أن الشكل أ ب حـ ء مربع. (المنوفية ٢٠ ، القاهرة ١٩ ، البحيرة ١٧)

١٨ أثبت أن النقط : أ (٣ ، −١) ، ب (−٤ ، ٦) ، حـ (٢ ، −٢) تقع على دائرة

واحدة مركزها م (−١ ، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤

(أسوان ٢٠ ، الإسكندرية ١٩ ، القليوبية ١٨ ، ش. سيناء ١٦ ، القاهرة ١٥) «٣١,٤ وحدة طول»

١٩ إذا كان بُعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوي ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

فأوجد قيمة : س

أوجد قيمة أ في كل من الحالتين الآتيتين :

(١) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (–٢ ، ٣) يساوى ٥
(الفيوم ٢٠ ، المنيا ١٩ ، الإسكندرية ١٨ ، مطروح ١٧) «١ أ ، –٥»

(٢) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٣ أ – ١ ، –٥) يساوى ١٣ «–٢ أ ، ٣»

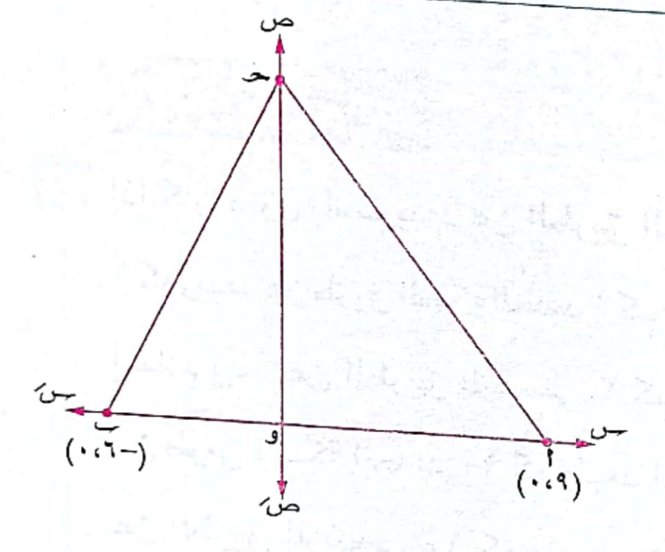
إذا كانت : أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٥ ، ١) وكانت أ ب = ب حـ
(البحيرة ١٩ ، البحيرة ١٧ ، البحيرة ١٥ ، بورسعيد ١٤) «٥ أ ، ١»

فأوجد قيمة : س

في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب = أ حـ

فأوجد : طول $\overline{\text{حـ و}}$

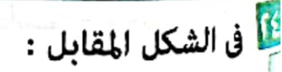


«١٢ وحدة طول»

إذا كان محور تماثل $\overline{\text{حـ ء}}$ يمر بالنقطة أ (٦ ، م) حيث حـ (٣ ، ١) ، ء (–٣ ، ٧)
(الدقهلية ١٦) «١٠»

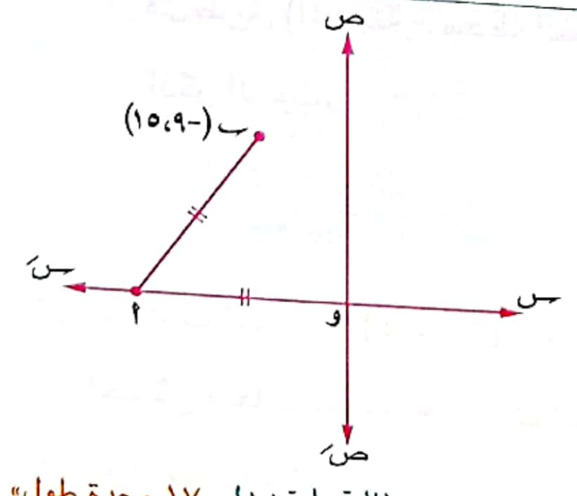
أوجد قيمة : م

في الشكل المقابل :


إذا كانت أ ∈ محور السينات

، وكان أ و = أ ب

أوجد : طول $\overline{\text{أ ب}}$



(الدقهلية ١٨) «١٧ وحدة طول»

٢٥ في الشكل المقابل :

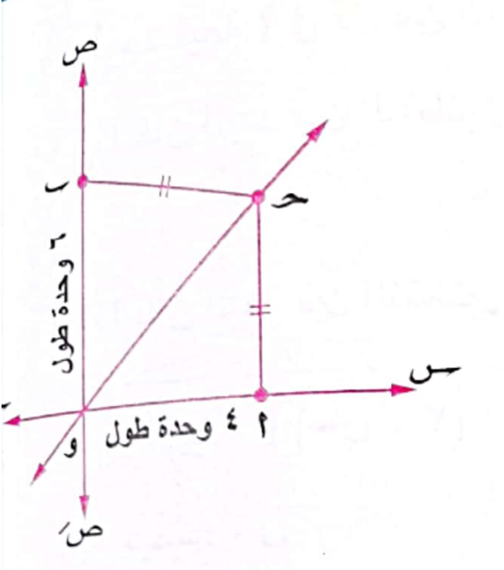
$\text{أ} \in \overleftrightarrow{\text{سَ س}}$ ، $\text{ب} \in \overleftrightarrow{\text{صَ ص}}$ بحيث :

و أ = ٤ وحدة طول ، و ب = ٦ وحدة طول

، والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{و حـ}}$ يمثل الدالة د : د (س) = س

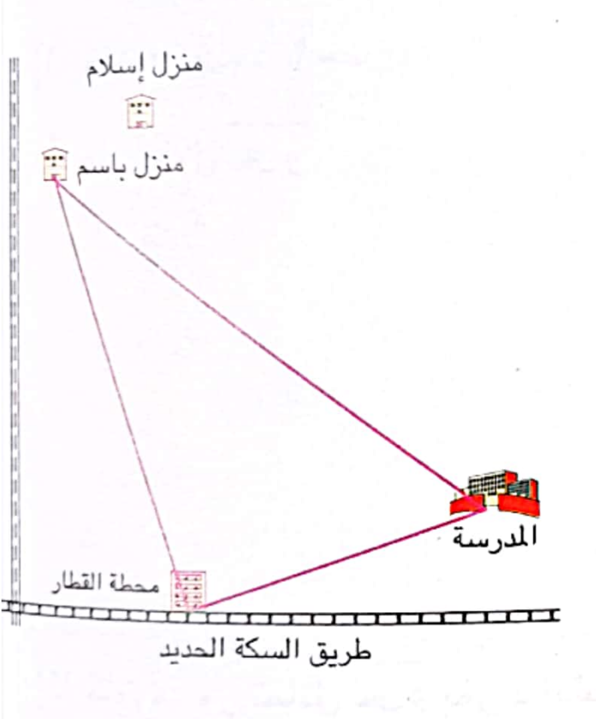
بحيث أ حـ = ب حـ

أوجد : إحداثيي النقطة حـ



(٥ ، ٥)

تطبيق حياتي



٢٦ إذا كان منزل باسم يبعد عن الطريق الرئيسى ١ كم ويبعد عن طريق السكة الحديد ٩ كم ، منزل إسلام يبعد عن الطريق الرئيسى ٣ كم ويبعد عن طريق السكة الحديد ١٠ كم وتبعد المدرسة عن الطريق الرئيسى ١٠ كم وتبعد عن طريق السكة الحديد ٢ كم وتبعد محطة القطار عن الطريق الرئيسى ٤ كم

١ أيهما أقرب إلى المدرسة : منزل باسم أم منزل إسلام ؟

٢ هل طريق (المدرسة – محطة القطار) عمودى على طريق (منزل باسم – محطة القطار) ؟ اذكر السبب.

للمتفوقين

٢٧ إذا كانت النقط : أ (٤ ، –٢) ، ب (س ، ٢) ، حـ (٣ ، ٥) ثلاث نقط فى مستوى إحداثى متعامد فأوجد قيمة س التى تحقق أن Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ثم احسب مساحته.

«صفر أ ، ٧ ، ١٢ وحدة مربعة أ ، ١٢,٥ وحدة مربعة»



الدرس 2

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت : أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$

نقطتين فى مستوى إحداثى متعامد

وكانت م منتصف $\overline{أب}$ حيث م (س ، ص)

من هندسة الشكل نجد أن :

Δ أ هـ م ، Δ م ن ب متطابقان.

∴ أ هـ = م ن ، هـ م = ن ب

∴ $س - س_1 = س_2 - س$ ، $ص - ص_1 = ص_2 - ص$

∴ $٢ س = س_1 + س_2$ ، $٢ ص = ص_1 + ص_2$

∴ $س = \frac{س_1 + س_2}{٢}$ ، $ص = \frac{ص_1 + ص_2}{٢}$

$$∴ م = \left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢}\right)$$

مثلًا : إذا كانت : س (٣ ، −٢) ، ص (−١ ، −٤) ، م منتصف $\overline{س ص}$

فإن : $م = \left(\frac{٣ + (-١)}{٢} ، \frac{-٢ + (-٤)}{٢}\right) = (١ ، -٣)$

مثال ①

إذا كانت: حـ(١٠ ، -٤) هي نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٤ ، -٢) فأوجد نقطة ب

الحل

بفرض أن ب(س ، ص) ، ∵ حـ منتصف $\overline{أب}$

∴ (١٠ ، -٤) = $\left(\frac{س + ٤}{٢} ، \frac{ص + (-٢)}{٢}\right)$

∴ $\frac{س + ٤}{٢} = ١٠$ ∴ س + ٤ = ٢٠

∴ س = ١٦ ، $\frac{ص - ٢}{٢} = -٤$

∴ ص - ٢ = -٨ ∴ ص = -٦ ∴ ب = (١٦ ، -٦)

> **لاحظ أنه**
> إذا كان: (أ ، ب) = (حـ ، ء)
> فإن: أ = حـ ، ب = ء

حاول بنفسك ١

إذا كانت: حـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد قيمتي س ، ص في كل مما يأتي:

١ أ(٢ ، ٥) ، ب(-٢ ، -٣) ، حـ(س ، ص)

٢ أ(س ، ٤) ، ب(-١ ، -٦) ، حـ(-٢ ، ص)

> **ملاحظة**
> إذا كان: $\overline{أب}$ قطرًا في دائرة مركزها م ، فإن م هي نقطة منتصف $\overline{أب}$

مثال ②

إذا كان: $\overline{أب}$ قطرًا في الدائرة م حيث: أ (٤ ، -١) ، ب (-٢ ، ٧)

أوجد إحداثيي نقطة م ومن ثم أوجد محيط الدائرة ومساحتها.

الحل

∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ م منتصف $\overline{أب}$

∴ نقطة م = $\left(\frac{٤ + (-٢)}{٢} ، \frac{-١ + ٧}{٢}\right)$ = (١ ، ٣)

، ∴ نق = أم = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (٣ + ١)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦}$

= $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول

، مساحة الدائرة = π نق^٢ = π × ٥^٢ = ٢٥ π وحدة مربعة

طريقة أخرى لحساب طول نصف قطر الدائرة:

∵ أب = $\sqrt{(-٢ - ٤)^٢ + (٧ + ١)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = \sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدة طول

، ∵ $\overline{أب}$ قطر ∴ نق = $\frac{١}{٢}$ أب = ٥ وحدة طول

ثم أكمل الحل بإيجاد محيط ومساحة الدائرة.

حاول بنفسك ٢

إذا كان: $\overline{أب}$ قطرًا في الدائرة م حيث أ (٤ ، ١) ، ب (-٦ ، ٣) فأوجد نقطة م

مثال ③

أثبت أن الشكل أ ب حـ ء متوازي أضلاع حيث:

أ(٤ ، ٣) ، ب(٠ ، ٢) ، حـ(-٢ ، -٣) ، ء(٢ ، -٢)

الحل

∵ قطرى الشكل الرباعي أ ب حـ ء هما $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$

، ∵ نقطة منتصف $\overline{أحـ}$ = $\left(\frac{٤ + (-٢)}{٢} ، \frac{٣ + (-٣)}{٢}\right)$

= (١ ، ٠)

، نقطة منتصف $\overline{بء}$ = $\left(\frac{٠ + ٢}{٢} ، \frac{٢ + (-٢)}{٢}\right)$ = (١ ، ٠)

∴ نقطة منتصف $\overline{أحـ}$ هي نفسها نقطة منتصف $\overline{بء}$

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر. ∴ أ ب حـ ء متوازي أضلاع.

> **لاحظ أنه**
> يمكنك حل هذا المثال باستخدام البعد بين نقطتين كما في الدرس السابق.

مثال ٤

أثبت أن النقط: أ (٥ ، ١) ، ب (١ ، −٣) ، حـ (−٥ ، ٣) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد نقطة ء التى تجعل الشكل أ ب حـ ء مستطيلاً.

الحل

$\because$ أب $= \sqrt{(١-٥)^٢ + (-٣-١)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢}$ وحدة طول

، ب حـ $= \sqrt{(-٥-١)^٢ + (٣+٣)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٣٦} = \sqrt{٧٢}$ وحدة طول

، أ حـ $= \sqrt{(-٥-٥)^٢ + (٣-١)^٢} = \sqrt{١٠٠ + ٤} = \sqrt{١٠٤}$ وحدة طول

$\therefore$ (أب)^٢ + (ب حـ)^٢ = ٣٢ + ٧٢ = ١٠٤ = (أ حـ)^٢

$\therefore$ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، بفرض أن: ء (س ، ص) بحيث يكون الشكل أ ب حـ ء مستطيلاً

$\therefore$ $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر

$\therefore$ نقطة منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ = نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

، $\because$ نقطة منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ $= \left(\frac{٥-٥}{٢} ، \frac{١+٣}{٢}\right) = (٠ ، ٢)$

، نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ $= \left(\frac{س+١}{٢} ، \frac{ص-٣}{٢}\right)$

$\therefore \left(\frac{س+١}{٢} ، \frac{ص-٣}{٢}\right) = (٠ ، ٢)$ $\therefore \frac{س+١}{٢} = ٠$

$\therefore$ س + ١ = ٠ $\therefore$ س = −١

، $\frac{ص-٣}{٢} = ٢$ $\therefore$ ص − ٣ = ٤

$\therefore$ ص = ٧

$\therefore$ ء = (−١ ، ٧)

مثال ٥

أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط: أ (−١ ، ٤) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (−٥ ، ١) متساوى الساقين وأوجد مساحته.

الحل

$\because$ أب $= \sqrt{(٣+١)^٢ + (١-٤)^٢} = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$ وحدة طول

، ب حـ $= \sqrt{(٣+٥)^٢ + (١-١)^٢} = \sqrt{٦٤} = ٨$ وحدة طول

، أحـ $= \sqrt{(-٥+١)^٢ + (١-٤)^٢} = \sqrt{١٦ + ٩} = ٥$ وحدة طول

$\therefore$ أب = أحـ $\therefore$ Δ أ ب حـ متساوى الساقين

، بفرض أن ء (س ، ص) منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore$ ء $= \left(\frac{٣-٥}{٢} ، \frac{١+١}{٢}\right) = (-١ ، ١)$

، $\because$ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ $\therefore$ $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، $\because$ أء $= \sqrt{(-١+١)^٢ + (١-٤)^٢} = \sqrt{٩} = ٣$ وحدة طول.

، ب حـ = ٨ وحدة طول.

$\therefore$ مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{١}{٢}$ ب حـ × أء

$= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٣ = ١٢$ وحدة مربعة.

أ(−١،٤)
(−٥،١)
ء
(٣،١)

رسم توضيحى

حاول بنفسك ٣

إذا كانت: حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، −٧) وكانت حـ منتصف $\overline{\text{ءهـ}}$ حيث ء (−٣ ، ٥) فأوجد نقطة هـ

١ أوجد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{أب}$ في كل من الحالات الآتية :

١ أ (٣ ، ٥) ، ب (٧ ، ١)
٢ أ (٥ ، −٣) ، ب (−١ ، ٣)
٣ أ (−٥ ، ٤) ، ب (٥ ، −٤)
٤ أ (٠ ، ٤) ، ب (٨ ، ٠)
٥ أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠)
٦ أ (٧ ، −٦) ، ب (−١ ، ٠)

٢ إذا كانت النقطة (س ، ٠) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١ ، −٥) ، ب (٢ ، ٥)

فأوجد قيمة : س

٣ إذا كانت النقطة (٥ ، ٣) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١٥ ، ص) ، ب (−٥ ، −٢)

فأوجد قيمة : ص

٤ إذا كانت : حـ (٦ ، −٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٥ ، −٣) فأوجد : إحداثيي نقطة ب

(القاهرة ١٩ ، بني سويف ١٩ ، الدقهلية ١٨ ، أسوان ١٧)

٥ إذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد س ، ص في كل من الحالات الآتية :

١ أ (١ ، ٥) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (س ، ص)
٢ أ (−٣ ، ص) ، ب (٩ ، ١١) ، حـ (س ، −٣) (أسوان ١٨)
٣ أ (س ، −٦) ، ب (٩ ، −١١) ، حـ (−٣ ، ص)
٤ أ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، حـ (٤ ، ٦) (مطروح ١٧ ، القاهرة ١٥)

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : (٤ ، −٣) منتصف $\overline{سص}$ حيث س (٥ ، −٢) (المنيا ١٦)

فإن : ص هي ....

(أ) (٤,٥ ، ٤,٥) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٤) (د) (٣ ، −٤)

٣ إذا كانت ب ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ بحيث أ ب = ب حـ وكانت أ (٠ ، ٥) ، حـ (-٤ ، -١)

فإن : ب هى ....

٤ 📖 إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقط تقع على استقامة واحدة وكان

أ ب = ب حـ = حـ ء ، أ (١ ، ٣) ، حـ (٥ ، ١)

فإن النقطة ب هى (........ ، ....) ، النقطة ء هى (........ ، ....)

٥ 📖 $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ، م منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ حيث أ (٠ ، ٨) ، ب (٣ ، ٢)

، حـ (-٣ ، ٦) فإن النقطة ء هى (........ ، ....)

، النقطة م هى (........ ، ....)

٨ 📖 إذا كانت : أ (١ ، -٦) ، ب (٩ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$

إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول. (سوهاج ١٨) «(٥ ، -٢) ، (٣ ، -٤) ، (٧ ، ٠)»

٩ إذا كانت نقطة الأصل منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (س - ٢ ، ص) ، ب (-٢ ، ٢)

فأوجد : (س ، ص) «(٤ ، -٢)»

١٠ أوجد قيمة كل من أ ، ب التى تحقق أن : (٢ أ - ٣ ، أ - ب) منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها (٧ ، -١) ، (٣ ، ٧) (الفيوم ١٢) «٤ ، ١»

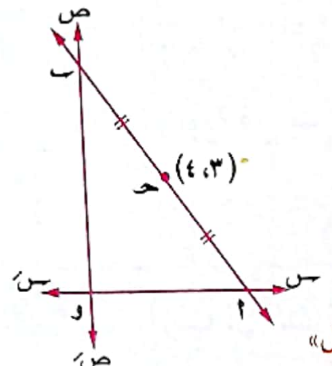
١١ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى دائرة مركزها م فإذا كانت : ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧) فأوجد :

١ إحداثيى أ

٢ محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤

(كفر الشيخ ١٨ ، ش. سيناء ١٧ ، القليوبية ١٦) «(٢ ، ٣) ، ٣١,٤ وحدة طول»

١٢ أ ب حـ مثلث حيث : أ (١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٣ ، ٧) فإذا كانت ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ برهن باستخدام الإحداثيات أن : ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

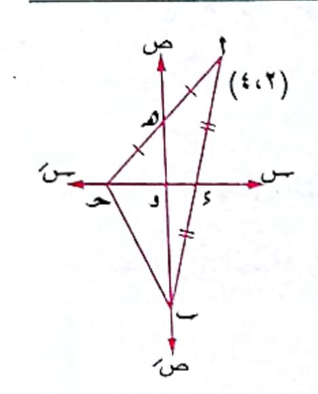


١٣ فى الشكل المقابل :

حـ(٣ ، ٤) منتصف $\overline{\text{أب}}$

أوجد : محيط المثلث و أ ب

(القليوبية ٢٠ ، الإسكندرية ١٧) «٢٤ وحدة طول»



١٤ فى الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

إذا كانت : أ (٢ ، ٤)

فأوجد : طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ومنها استنتج طول $\overline{\text{ء هـ}}$

«٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول ، $\sqrt{٥}$ وحدة طول»

١٥ $\overline{\text{أء}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ، م منتصف $\overline{\text{أء}}$ حيث م (٠ ، ٦) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (−٣ ، ٦)

أوجد : إحداثيى نقطة أ

(كفر الشيخ ١٧) «(٠ ، ٨)»

١٦ إذا كانت : أ (−١ ، −١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠) ، ء (٣ ، −٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى متعامد أثبت أن : $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر.

(السويس ١٩)

١٧ أثبت أن النقط : أ (٣ ، −٢) ، ب (−٥ ، ٠) ، حـ (٠ ، −٧) ، ء (٨ ، −٩) هى رؤوس متوازى أضلاع.

(الفيوم ١٩)

١٨ إذا كانت النقط : أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٣) ، حـ (−١ ، −٢) ، ء (−٢ ، ٣) هى رؤوس معين فأوجد :

١) إحداثيى نقطة تقاطع القطرين.

٢) مساحة المعين أ ب حـ ء

(الإسكندرية ٢٠ ، بورسعيد ١٨ ، الفيوم ١٧) «(١ ، ٠) ، ٢٤ وحدة مربعة»

١٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٥) ، حـ (٠ ، −٣)

أوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه ، ثم أوجد إحداثيى نقطة ء

(الدقهلية ٢٠ ، الإسكندرية ١٩ ، البحيرة ١٨ ، أسيوط ١٧) «$\left(١\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$ ، (−١ ، ٤)»

٢٠ أثبت أن النقط : أ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، -٤) ، حـ (-٤ ، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب ، ثم أوجد إحداثيى نقطة ى التى تجعل الشكل أ ب حـ ى مستطيلاً.

(البحيرة ١٩ ، كفر الشيخ ١٤ ، أسيوط ١١) «(٠ ، ٦)»

٢١ أثبت أن النقط : أ (٥ ، ٣) ، ب (٣ ، -٢) ، حـ (-٢ ، -٤) هى رؤوس مثلث منفرج الزاوية فى ب ، ثم أوجد إحداثيى نقطة ى التى تجعل الشكل أ ب حـ ى معيناً وأوجد مساحة سطحه.

«(٠ ، ١) ، ٢١ وحدة مربعة»

٢٢ أثبت أن النقط : أ (-٣ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، -٦) هى رؤوس مثلث متساوى الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على $\overline{بحـ}$

(قنا ١٩ ، مطروح ١٨ ، المنوفية ١٦ ، القليوبية ١٢) «$\sqrt{٢٦}$ وحدة طول»

٢٣ أ ب حـ مثلث حيث أ (١ ، ١) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (١ ، ٣)

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين وأوجد مساحة سطحه. (الشرقية ١٨) «٢ وحدة مربعة»

٢٤ أ ب حـ ى متوازى أضلاع فيه : أ (٣ ، ٤) ، ب (٢ ، -١) ، حـ (-٤ ، -٣)

أوجد إحداثيى ى ، خذ هـ $\in \overrightarrow{أى}$ حيث أ هـ = ٢ أ ى ما إحداثيا النقطة هـ ؟

«(-٣ ، ٢) ، (-٩ ، ٠)»

٢٥ أ ب حـ ى شكل رباعى فيه : س (٢ ، ٣) ، ص (م ، ٣) ، ع (١ ، -١) ، ل (-٤ ، ن) منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أى}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{ىحـ}$ على الترتيب.

أوجد قيمة : م + ن

«-٤»

للمتفوقين

٢٦ أ ب حـ ى شبه منحرف فيه : ب حـ = ٢ أ ى فإذا كان : أ (٦ ، ٤) ، ب (٤ ، -٢) ، حـ (-٢ ، -٤) فأوجد إحداثيى نقطة ى حيث $\overline{بحـ}$ // $\overline{أى}$

(إرشاد : أكمل متوازى الأضلاع أ ب حـ هـ واستخدمه فى إيجاد ى) «(٣ ، ٣)»



درست سابقًا ميل الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه.

فإذا كانت أ ، ب نقطتين فى المستوى الإحداثى المتعامد بحيث أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$

فإن : ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

وفى هذا الدرس ستتعلم كيفية إيجاد ميل المستقيم بمعلومية قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ونمهد لدراسة هذا الموضوع بدراسة القياس الموجب والقياس السالب للزاوية.

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية

فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع محور السينات فى نقطة حـ

فإن : $\overleftrightarrow{أب}$ يصنع زاويتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

• إحداهما موجبة (أى لها قياس موجب)

مأخوذة من الاتجاه الموجب لمحور السينات

إلى المستقيم فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة وهى ∠ د حـ أ

• والأخرى سالبة (أى لها قياس سالب) مأخوذة من الاتجاه الموجب لمحور السينات إلى المستقيم في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة وهى ∠ د و ب

ميل الخط المستقيم

تعريف

ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

أى أن: ميل الخط المستقيم = طا هـ

حيث هـ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

فمثلاً: فى الشكل المقابل:

المستقيم ل يصنع زاوية قياسها ٤٥°

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

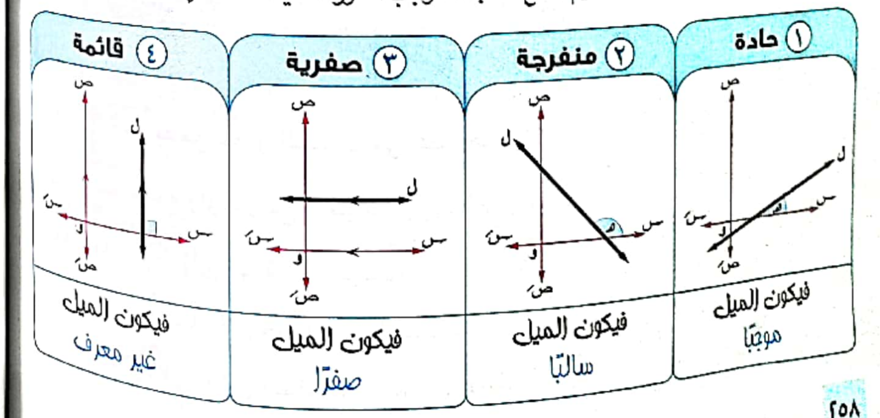
فيكون: ميل المستقيم ل = طا ٤٥° = ١

لاحظ أن

المستقيم يمر بالنقطتين: (٢ ، ٠) ، (٧ ، ٥) فيكون:

$$\text{ميل المستقيم ل} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٥ - ٠}{٧ - ٢} = \frac{٥}{٥} = ١$$

ملاحظة: الزاوية التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تأخذ إحدى الحالات الآتية:



مثال ١

أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها:

١ ٤٥°　　٢ ١٢٤° ١٥َ ١٢ً

الحل

١ ميل الخط المستقيم = طا ٤٥° = ١

ابدأ → tan 4 5 =

٢ ميل الخط المستقيم = طا ١٢٤° ١٥َ ١٢ً ≃ −١,٤٦٨٥

ابدأ → tan 1 2 4 °'" 1 5 °'" 1 2 °'" =

مثال ٢

أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم: ١ ١,٤٨٦　　٢ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

الحل

١ ∵ م = طا هـ　　∴ طا هـ = ١,٤٨٦

، ∵ الميل موجب　　∴ ∠ هـ زاوية حادة

∴ ق(∠ هـ) ≃ ٥٦° ٣َ ٤١ً

ابدأ → SHIFT tan 1 . 4 8 6 = °'"

٢ ∵ م = طا هـ　　∴ طا هـ = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

، ∵ الميل سالب　　∴ ∠ هـ زاوية منفرجة

وباستخدام الآلة الحاسبة كما يلى:

ابدأ → SHIFT tan (−) 1 ÷ √ 3 =

نجد أن الآلة تعطى −٣٠°

حيث إنها مبرمجة على إيجاد الزاوية الحادة فقط سواء السالبة أو الموجبة ولكن المطلوب هو الزاوية الموجبة ولذلك نوجد ق(∠ هـ) المطلوبة بإيجاد مكملة الزاوية ٣٠°

فيكون: ق(∠ هـ) = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

مثال ٣

أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين :

١ (−٢ ، √٣) ، (١ ، ٤√٣)   ٢ (−٢ ، ٣) ، (−٣ ، ٤)

الحل

١ ∵ المستقيم ل يمر بالنقطتين : (−٢ ، √٣) ، (١ ، ٤√٣)

∴ ميل المستقيم ل = $\frac{٤\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{١ - (-٢)} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

∴ ق (∠ هـ) = ٦٠°

لاحظ أن الميل موجب وبالتالى تكون الزاوية حادة.



٢ ∵ المستقيم ل يمر بالنقطتين : (−٢ ، ٣) ، (−٣ ، ٤)

∴ ميل المستقيم ل = $\frac{٤ - ٣}{-٣ - (-٢)} = -١$

باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

SHIFT tan (-) 1 =

نجد أن الآلة تعطى −٤٥° (وهى زاوية حادة سالبة)

فنوجد الزاوية الموجبة المنفرجة كما يلى : ق (∠ هـ) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

لاحظ أن الميل سالب وبالتالى تكون الزاوية منفرجة.

حاول بنفسك ١

١ أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

١ ٣٠°   ٢ ٥٤° ٣٠َ ٩ً   ٣ ١٢٠°

٢ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم ٢,٦

٣ أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التى يصنعها المستقيم (ل) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين : (٤ ، −١) ، (٥ ، −٣)

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين

فى الشكل المقابل :

إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين متوازيين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب ويصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياساهما $هـ_١$ ، $هـ_٢$ على الترتيب فإن :

∵ $ل_١ // ل_٢$ ∴ $هـ_١ = هـ_٢$ بالتناظر

∴ ظا $هـ_١$ = ظا $هـ_٢$ ∴ $م_١ = م_٢$

وبالتالى نستنتج ما يلى :

إذا كان : $ل_١ // ل_٢$ فإن : $م_١ = م_٢$

أى أنه : **إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين.**

ويمكن أيضًا استنتاج العكس :

إذا كان : $م_١ = م_٢$ فإن : $ل_١ // ل_٢$

أى أنه : **إذا تساوى ميلا مستقيمين فى المستوى كان المستقيمان متوازيين.**

مثال ٤

أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (−١ ، ٦) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°

الحل

∵ ميل المستقيم الأول $م_١ = \frac{٦ - ٣}{-١ - ٢} = \frac{٣}{-٣} = -١$

، ميل المستقيم الثانى $م_٢$ = ظا ١٣٥° = −١   ∴ $م_١ = م_٢$

∴ المستقيمان متوازيان.

مثال ٥

إذا كانت : أ(-١ ، ٢) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(-٤ ، ١) ، ء(س ، ٢) أربع نقاط في مستوى إحداثي متعامد وكان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـء}}$ فأوجد قيمة : س

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـء}}$ ∴ ميل المستقيم المار بالنقطتين : أ(-١ ، ٢) ، ب(٢ ، ٣)

يساوي ميل المستقيم المار بالنقطتين : حـ(-٤ ، ١) ، ء(س ، ٢)

∴ $\frac{٣ - ٢}{٢ - (-١)} = \frac{٢ - ١}{\text{س} - (-٤)}$ ∴ $\frac{١}{٣} = \frac{١}{\text{س} + ٤}$

∴ س + ٤ = ٣ ∴ س = -١

مثال ٦

في المستوى الإحداثي المتعامد أثبت أن النقط :

أ(-١ ، ٦) ، ب(٣ ، -٤) ، حـ(٢ ، -١,٥) تقع على استقامة واحدة.

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{-٤ - ٦}{٣ - (-١)} = \frac{-١٠}{٤} = -\frac{٥}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{-١,٥ - (-٤)}{٢ - ٣} = \frac{٢,٥}{-١} = -٢\frac{١}{٢} = -\frac{٥}{٢}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

، ∵ ب نقطة مشتركة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

لاحظ أنه

إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

فإن : أ ، ب ، حـ تكون على استقامة واحدة.

حاول بنفسك ٢

١) أثبت أن : المستقيم $ل_١$ المار بالنقطتين : (١ ، ٥) ، (-٢ ، -١) يوازي المستقيم $ل_٢$ المار بالنقطتين : (٠ ، -١) ، (٥ ، ٩)

٢) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // محور السينات حيث : أ(٥ ، -٤) ، ب(-٢ ، ص) فأوجد قيمة : ص

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين

إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب

وكان : $ل_١ \perp ل_٢$ فإن : $م_١ \times م_٢ = -١$ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

أى أن : **حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين يساوى -١**

والعكس صحيح : إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$

وكان : $م_١ \times م_٢ = -١$ فإن : $ل_١ \perp ل_٢$

أى أنه : **إذا كان حاصل ضرب ميلى مستقيمين يساوى -١ فإن المستقيمين يكونان متعامدين.**

مثال ٧

أثبت أن المستقيم $ل_١$ المار بالنقطتين : (-١ ، ٤) ، (٣ ، ٧) يكون عموديًا على المستقيم $ل_٢$ المار بالنقطتين : (١ ، ١) ، (٤ ، -٣)

الحل

∵ ميل $ل_١$ = $\frac{٧ - ٤}{٣ - (-١)} = \frac{٣}{٤}$ ، ميل $ل_٢$ = $\frac{-٣ - ١}{٤ - ١} = \frac{-٤}{٣}$

، ∵ ميل $ل_١$ × ميل $ل_٢$ = $\frac{٣}{٤} \times \frac{-٤}{٣} = -١$ ∴ $ل_١ \perp ل_٢$

مثال ٨

في المستوى الإحداثي المتعامد إذا كانت النقط : أ(١ ، ٧) ، ب(٢ ، ٤) ، حـ(٥ ، ص) تمثل رءوس مثلث قائم الزاوية في ب فأوجد قيمة : ص

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٤ - ٧}{٢ - ١} = -٣$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{\text{ص} - ٤}{٥ - ٢} = \frac{\text{ص} - ٤}{٣}$

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = -١

∴ $-٣ \times \frac{\text{ص} - ٤}{٣} = -١$ ∴ ص - ٤ = ١ ∴ ص = ٥

> **ملاحظة**
>
> إذا كان: $ل_1 \perp ل_2$ وكان ميل $ل_1$ هو $م_1$ ، ميل $ل_2$ هو $م_2$ حيث $م_1 \in ح^*$ ، $م_2 \in ح^*$
>
> فإن: $م_2 = \frac{-1}{م_1}$ ، $م_1 = \frac{-1}{م_2}$

فمثلًا: • إذا كان ميل المستقيم ل هو ٢ فإن ميل المستقيم العمودى عليه $\frac{-1}{2}$

• إذا كان ميل المستقيم ل هو $\frac{-2}{3}$ فإن ميل المستقيم العمودى عليه $\frac{3}{2}$

مثال ٩

فى الشكل المقابل:

إذا كان: $ل_1 \perp ل_2$

فأوجد: قيمة ك

الحل

$\because$ المستقيم $ل_1$ يمر بالنقطتين ب(−١ ، ٠) ، حـ(٠ ، ١)

$\therefore$ ميل $ل_1 = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = 1$

، $\because$ المستقيم $ل_2$ يمر بالنقطتين أ(٠ ، ك) ، ء(٤ ، ٠)

$\therefore$ ميل $ل_2 = \frac{0 - ك}{4 - 0} = -\frac{ك}{4}$ (١)

، $\because ل_1 \perp ل_2$ ، ميل $ل_1 = 1$

$\therefore$ ميل $ل_2 = -1$ (٢)

من (١) ، (٢): $\therefore -\frac{ك}{4} = -1$ $\therefore ك = 4$

حاول بنفسك ٣

١ إذا كانت: أ(−٢ ، ٥) ، ب(١ ، ٢) ، حـ(٣ ، ٤) ثلاث نقط فى مستوى إحداثى متعامد فأثبت أن: $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ب حـ}$

٢ أثبت أن: المستقيم المار بالنقطتين: (٧ ، −١) ، (٥ ، −٣) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°

ملاحظات لحل مسائل الأشكال الرباعية

لإثبات أن الشكل الرباعى شبه منحرف نثبت أن:

ضلعين متقابلين فيه متوازيان والضلعان الآخران غير متوازيين.

لإثبات أن الشكل الرباعى متوازى أضلاع نثبت إحدى الخواص الآتية:

1. كل ضلعين متقابلين متوازيان.
2. كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول.
3. ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان فى الطول.
4. القطران ينصف كل منهما الآخر.

لإثبات أن الشكل الرباعى مستطيل أو معين أو مربع فإننا نثبت أولًا أن هذا الشكل متوازى أضلاع كما سبق ، ثم:

• **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مستطيل نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين:**

(١) ضلعان متجاوران فيه متعامدان. (٢) القطران متساويان فى الطول.

• **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو معين نثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين:**

(١) ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول.

(٢) القطران متعامدان.

• **لإثبات أن متوازى الأضلاع هو مربع نثبت إحدى الخواص الآتية:**

(١) ضلعان متجاوران فيه متعامدان ومتساويان فى الطول.

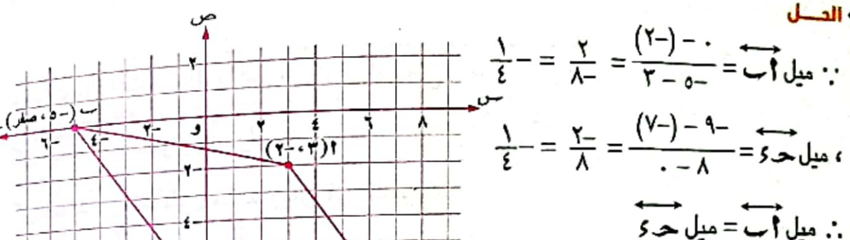
(٢) ضلعان متجاوران فيه متعامدان ، والقطران متعامدان.

(٣) القطران متساويان فى الطول ، ومتعامدان.

(٤) ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول وقطراه متساويان فى الطول.

مثال ١٠

على مستوى إحداثى متعامد مثل النقط: أ (٣ ، -٢) ، ب (-٥ ، ٠) ، ح (٠ ، -٧) ، ء (٨ ، -٩) ثم أثبت أن: الشكل أ ب ح ء متوازى أضلاع.



الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٠ - (-٢)}{-٥ - ٣} = \frac{٢}{-٨} = -\frac{١}{٤}$

، ميل $\overleftrightarrow{حء} = \frac{-٩ - (-٧)}{٨ - ٠} = \frac{-٢}{٨} = -\frac{١}{٤}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{حء}$

∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{حء}$ (١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أء} = \frac{-٩ - (-٢)}{٨ - ٣} = \frac{-٧}{٥}$

، ميل $\overleftrightarrow{بح} = \frac{-٧ - ٠}{٠ - (-٥)} = \frac{-٧}{٥}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أء}$ = ميل $\overleftrightarrow{بح}$ ∴ $\overleftrightarrow{أء} // \overleftrightarrow{بح}$ (٢)

من (١) ، (٢): ∴ الشكل أ ب ح ء متوازى أضلاع.

مثال ١١

أثبت أن النقط: أ (٢ ، -٢) ، ب (٨ ، ٤) ، ح (٥ ، ٧) ، ء (-١ ، ١) هى رءوس المستطيل أ ب ح ء

الحل

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-٢ - ٤}{٢ - ٨} = \frac{-٦}{-٦} = ١$ ، ميل $\overleftrightarrow{حء} = \frac{٧ - ١}{٥ - (-١)} = \frac{٦}{٦} = ١$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{حء}$

∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{حء}$ (١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{أء} = \frac{-٢ - ١}{٢ - (-١)} = \frac{-٣}{٣} = -١$ ، ميل $\overleftrightarrow{بح} = \frac{٤ - ٧}{٨ - ٥} = \frac{-٣}{٣} = -١$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أء}$ = ميل $\overleftrightarrow{بح}$

∴ $\overleftrightarrow{أء} // \overleftrightarrow{بح}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: الشكل أ ب ح ء متوازى أضلاع

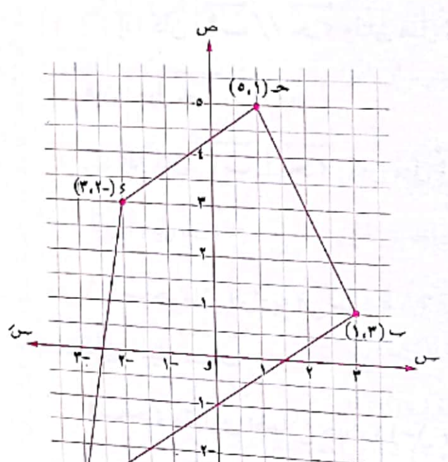
∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = ١ × -١ = -١

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{بح}$ ∴ الشكل أ ب ح ء مستطيل.

مثال ١٢

على مستوى إحداثى متعامد مثل النقط: أ (-٣ ، -٣) ، ب (٣ ، ١) ، ح (١ ، ٥) ، ء (-٢ ، ٣) ثم أثبت أن: الشكل أ ب ح ء شبه منحرف.

الحل



∵ ميل $\overleftrightarrow{حء} = \frac{٥ - ٣}{١ - (-٢)} = \frac{٢}{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١ - (-٣)}{٣ - (-٣)} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{حء}$ = ميل $\overleftrightarrow{أب}$

∴ $\overleftrightarrow{حء} // \overleftrightarrow{أب}$ (١)

، ميل $\overleftrightarrow{بح} = \frac{٥ - ١}{١ - ٣} = -٢$

، ميل $\overleftrightarrow{أء} = \frac{٣ - (-٣)}{-٢ - (-٣)} = ٦$

∴ ميل $\overleftrightarrow{بح}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{أء}$

∴ $\overleftrightarrow{بح}$ لا يوازى $\overleftrightarrow{أء}$ (٢)

من (١) ، (٢): ∴ الشكل أ ب ح ء شبه منحرف.

١ أكمل ما يأتى :

١ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات .... (القليوبية ١١)

٢ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ....

٣ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢}{٣}$

فإن : ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = ... (الوادى الجديد ١٢)

٤ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١}{٢}$

فإن : ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = ... (الغربية ١١)

٥ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه : أ = (١ ، ٥) ، ب = (٠ ، ١)

فإن : ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = ... (السويس ١١)

٦ أ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث أ (-١ ، ٤) ، ب (٠ ، ١)

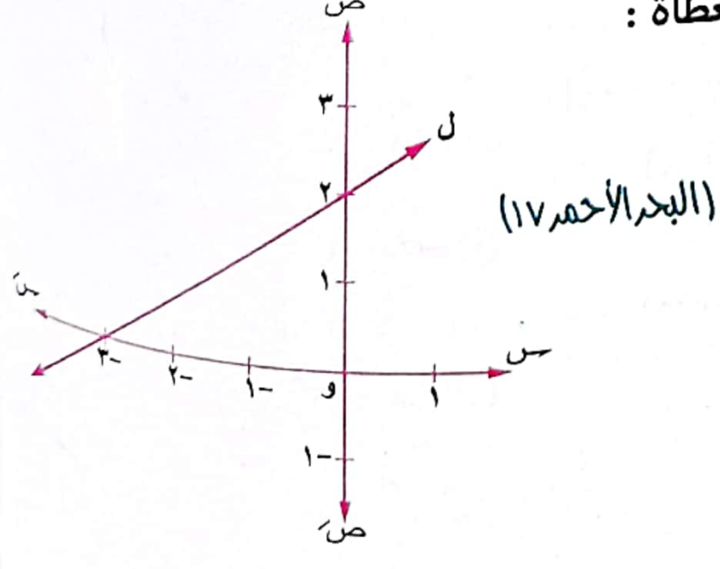
فإن : ميل $\overleftrightarrow{ء حـ}$ = ... (الإسماعيلية ١١)

٧ إذا كان : أ ب حـ ء مربعًا قطراه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$ حيث : أ (٣ ، ٥) ، حـ (٥ ، -١)

فإن : ميل $\overleftrightarrow{ب ء}$ = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى الشكل المقابل :



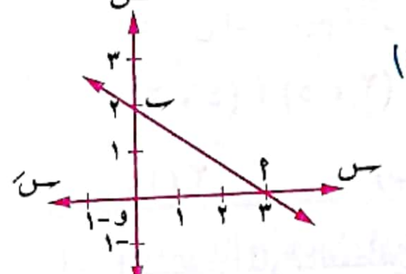
ميل المستقيم ل يساوى .... (البحر الأحمر ١٧)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

٢ في الشكل المقابل :

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...



(الأقصر ١٩)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

٣ ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها هـ يساوى ....

(الجيزة ١٧)

(أ) جا هـ (ب) جتا هـ (جـ) $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ (د) جا هـ + جتا هـ

٤ إذا كان ميل خط مستقيم أكبر من الصفر فإن الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون ....

(دمياط ١١)

(أ) صفرية. (ب) حادة. (جـ) قائمة. (د) منفرجة.

٥ إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متعامدين فإن .... (قنا ١٢)

(أ) $م_١ = م_٢$ (ب) $م_١ = -م_٢$ (جـ) $م_١ م_٢ = -١$ (د) $م_١ م_٢ = ١$

٦ إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متوازيين فإن .... (بورسعيد ٠٨)

(أ) $م_١ - م_٢ = ٠$ (ب) $م_١ + م_٢ = ٠$ (جـ) $م_١ م_٢ = ٠$ (د) $م_١ - م_٢ \neq ٠$

٧ المستقيم المار بالنقطتين : (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٣) يوازى المستقيم الذى ميله يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) $\frac{-٢}{٣}$

٨ إذا كان المستقيم ل عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين : (-١ ، ٢) ، (٠ ، ٥)

فإن ميل المستقيم ل = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $-\frac{١}{٣}$

٩ إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متعامدين ، $م_١ = ٠,٧٥$

فإن : $م_٢$ = ... (الشرقية ١٣)

(أ) $-\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $-\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

١٠ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متوازيين

فإن : ك = ... (مطروح ١٩ ، الإسكندرية ١٧)

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٣ (د) $\frac{-٤}{٣}$

١١ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين : (س ، ٥) ، (٢ ، ٣) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) صفر (د) ١

١٢ المستقيم المار بالنقطتين : (-١ ، -١) ، (٤ ، ٤) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها .... (ش. سيناء ١٧ ، المنوفية ١٥)

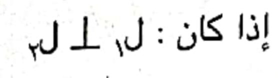
(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

١٣ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين : (ك ، ٠) ، (٠ ، ٤) عموديًا على المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن : ك = ... (أسوان ١٣)

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) ١ (د) -١

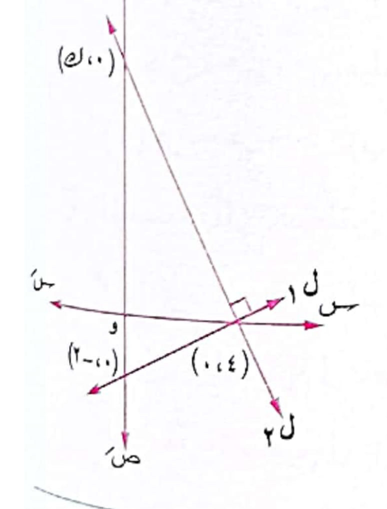
١٤ فى الشكل المقابل :



إذا كان : $ل_١ \perp ل_٢$

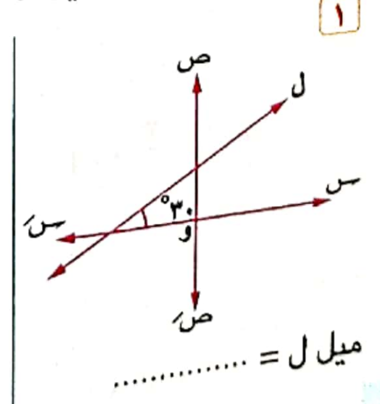
فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨



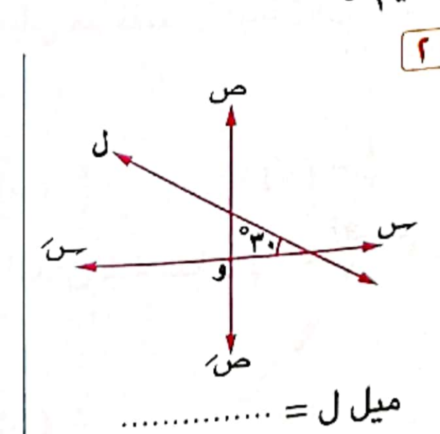
٣ اكتب أسفل كل شكل ميل المستقيم ل :

١



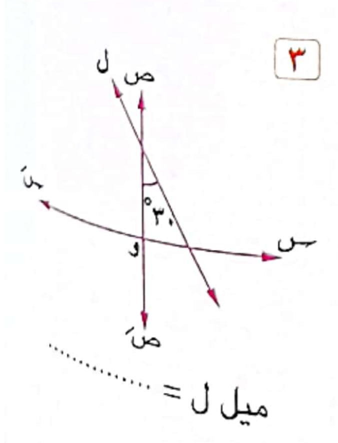
ميل ل = ...

٢



ميل ل = ...

٣



ميل ل = ...

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ...

١ صفر
٢ ٣٠°
٣ ٤٥°
٤ ٥٧°
٥ ٦٠°
٦ ٩٠°
٧ ٨٦ َ٤٢°
٨ ١٣٥°

باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم الذى ميله (م ... الاتجاه الموجب لمحور السينات فى كل من الحالات الآتية :

١ م = ٠,٣
٢ م = ٠,٣٦٧٣
٣ م = ١,٠٢٤٦
٤ م = $\frac{٤}{٥}$

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٦) يوازى المستقيم المار بالنقطتين : (٠ ، ٥) ، (−١ ، ١)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : أ (−٣ ، ٤) ، حـ (−٢ ، −٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين : ب (١ ، ٢) ، ء (−٣ ، ٢)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، −١) ، (٦ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (السويس ٢٠ ، المنيا ١٨ ، الإسكندرية ١٧)

أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٢ $\sqrt{٣}$) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٣٠° (القاهرة ١٦ ، بنى سويف ١٦)

فى المستوى الإحداثى المتعامد إذا كانت : أ (١ ، ٥) ، ب (س − ١ ، ٣) ، حـ (٤ ، ٧) ، ء (٢ ، ١) أربع نقاط تحقق أن $\overleftrightarrow{أء}$ // $\overleftrightarrow{ب حـ}$ فأوجد قيمة : س ٦٠

إذا كان المثلث الذى رءوسه النقط ص (٤ ، ٢) ، س (٣ ، ٥) ، ع (−٥ ، ٢) قائم الزاوية فى ص أوجد قيمة : أ (أسيوط ٢٠ ، المنوفية ١٧ ، دمياط ١٧) −١٠

إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات حيث : أ (س ، ٧) ، ب (٣ ، ٥) فأوجد قيمة : س (الأقصر)

إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // محور السينات حيث : حـ (٤ ، ٢) ، ء (−٥ ، ص) فأوجد قيمة : ص

١٤ إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° **فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ :**

(أسوان ٢٠ ، الإسكندرية ١٨ ، أسيوط ١٧) «صفر ، ٢»

١ متوازيين. ٢ متعامدين.

١٥ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين : (٤ ، ٣) ، (٢ ، −٥) «٧٥° ٥٧َ ٥٠ً»

١٦ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين : (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٢) «١٣٥°»

١٧ أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين : (−٢ ، ٥) ، (٤ ، −١) «٤٥°»

١٨ **أثبت أن النقط :** أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٠ ، −١) تقع على استقامة واحدة.

(القاهرة ١٣)

١٩ إذا كانت النقط : (٠ ، ١) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة **فأوجد قيمة أ :**

(القاهرة ٢٠ ، دمياط ١٩ ، سوهاج ١٨ ، قنا ١٦ ، الغربية ١٤) «١»

٢٠ إذا كان : أ (١ ، ٧) ، ب (−١ ، ٥) ، حـ (٤ ، ٢) **أثبت أن :** حـ ∉ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

٢١ إذا كانت : أ (−١ ، −١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠)

أثبت أن : المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في ب

(أسوان ١٩ ، كفر الشيخ ١٧ ، السويس ١٤)

٢٢ **أثبت أن النقط :** أ (−١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، حـ (٤ ، ٢) ، ء (٥ ، ٦) هي رءوس لمتوازي الأضلاع أ ب ء حـ

(بني سويف ١٨ ، الأقصر ١٢)

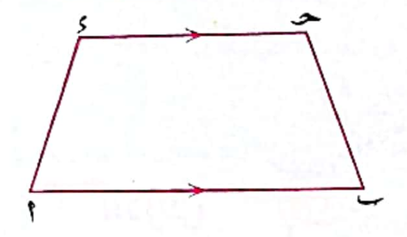
٢٣ **أثبت باستخدام الميل أن النقط :** أ (−١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) هي رءوس المستطيل أ ب حـ ء

(ش سيناء ١٨ ، سوهاج ١٧ ، بني سويف ١٣)

٢٤ **أثبت أن النقط :** أ (١ ، ٣) ، ب (٦ ، ٤) ، حـ (٧ ، ٩) ، ء (٢ ، ٨) هي رءوس المعين أ ب حـ ء

٢٥ أثبت أن النقط : أ (–١ ، –١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠) ، ء (٣ ، –٤) هى رءوس مربع.

٢٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أب}$ // $\overline{حء}$

، أ (٩ ، –٢) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (س ، – س)

، ء (٤ ، –٣) أوجد إحداثيي نقطة حـ

(السويس ١٩ ، الإسكندرية ١٤) «(١ ، –١)»

٢٧ أثبت أن النقط : أ (٤ ، ٣) ، ب (٧ ، ٠) ، حـ (١ ، –٢) هى رؤوس مثلث

وإذا كانت نقطة ء (١ ، ٢) فأثبت أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف

وأوجد النسبة بين : أ ء ، ب حـ «١ : ٢»

للمتفوقين

٢٨ أوجد ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة جيبها $\frac{٣}{٥}$ «$\frac{٣}{٤}$»

٢٩ إذا كانت النقط : أ (١ ، ١) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (٠ ، –٣ – س) ، ء (س ، ص)

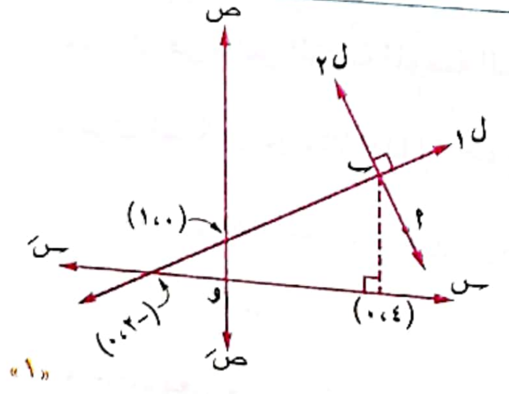
هى رءوس المستطيل أ ب حـ ء فأوجد قيمة كل من : س ، ص «–٢ ، ٤»

٣٠ أ ب حـ ء معين فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، ك) ، حـ (–١ ، –٢) أوجد :

[١] قيمة ك [٢] طول $\overline{بء}$

(الإسماعيلية ١٣) «–٣ ، ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طول»

٣١ في الشكل المقابل :



إذا كان : المستقيم $ل_١$ ⊥ المستقيم $ل_٢$

، أ ∈ المستقيم $ل_٢$ بحيث : أ (٥ م ، م)

أوجد قيمة : م «١»

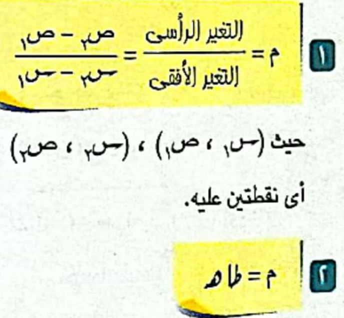


الدرس 4
معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

سبق أن درسنا أن :

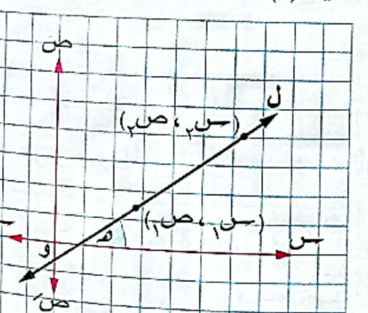
العلاقة أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب (كلاهما معًا) ≠ ٠

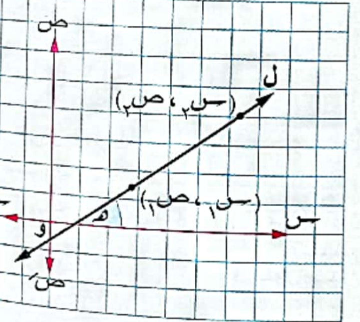
هى علاقة خطية يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمكن إيجاد ميله (م) بإحدى الطريقتين الآتيتين :



١ $\text{م} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

حيث $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ أى نقطتين عليه.





٢ م = ظا هـ

حيث هـ هو قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

وسوف نستكمل دراستنا لهذا الموضوع بدراسة كيفية :

* إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات إذا علمت معادلة الخط المستقيم.
* إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميله وطول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات.

أولًا إيجاد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

مثال تمهيدى

مثل بيانيًا العلاقة : ٢ س − ص + ٣ = ٠ ثم أوجد من الرسم ميل المستقيم الممثل لهذه العلاقة وطول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات.

الحل

لرسم المستقيم يجب إيجاد على الأقل نقطتين من نقط المستقيم ، ولتسهيل ذلك يفضل وضع أحد المتغيرين س أو ص فى طرف مستقل :

∵ ٢ س − ص + ٣ = ٠ ∴ − ص = −٢ س − ٣ ∴ ص = ٢ س + ٣

بوضع س = ٠ ∴ ص = ٠ + ٣ = ٣

∴ (٠ ، ٣) إحدى نقط المستقيم

بوضع س = −١ ∴ ص = −٢ + ٣ = ١

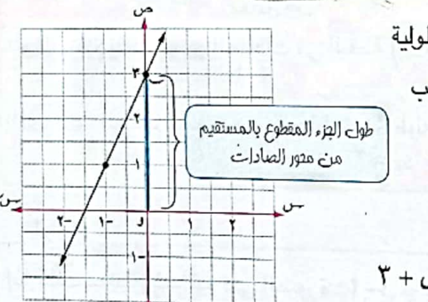
∴ (−١ ، ١) إحدى نقط المستقيم

أى أن : المستقيم يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (−١ ، ١)

∴ ميل المستقيم = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{1 - 3}{-1 - 0} = \frac{-2}{-1} = 2$

ومن الرسم نجد أن : و ب = ٣ وحدات طولية

أى أن : المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات طولية



وبملاحظة معادلة المستقيم : ص = ٢ س + ٣

نجد أن :

* ميل المستقيم = معامل س = ٢
* طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات = | الحد المطلق | = | ٣ | = ٣ وحدات طولية

طول الجزء المقطوع بالمستقيم من محور الصادات

ص = ② س + ③

ميل المستقيم

أى أنه :

إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة : ص = م س + حـ فإن :

- ميل الخط المستقيم = م
- طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم = |حـ| والمستقيم يمر بالنقطة (٠ ، حـ)

مثال ١

أوجد ميل الخط المستقيم : ٢ س + ٥ ص – ١٥ = ٠ وأوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

الحل

نضع معادلة الخط المستقيم على الصورة : ص = م س + حـ

∴ ٥ ص = –٢ س + ١٥   ∴ ص = $\frac{-٢}{٥}$ س + ٣

∴ ميل المستقيم = $\frac{-٢}{٥}$ وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = ٣ وحدات طولية.

ملاحظة

فى المثال السابق وبملاحظة المعادلة على الصورة : ٢ س + ٥ ص – ١٥ = ٠ نجد أن :

- ميل الخط المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{٥}$
- المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة $\left(٠ ، \frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right)$ أى (٠ ، ٣)

أى أن : المستقيم يقطع من محور الصادات جزءًا طوله = $\left|\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right|$ = |٣| = ٣ وحدات طولية.

أى أنه :

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : أ س + ب ص + حـ = ٠ فإن :

- ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$
- المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة $\left(٠ ، \frac{-حـ}{ب}\right)$

أى أن : طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\left|\frac{-حـ}{ب}\right|$

فمثلًا : • المستقيم الذى معادلته : س – ٢ ص + ٣ = ٠ .

ميله = $\frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$ ، ويقطع محور الصادات فى النقطة $\left(٠ ، \frac{٣}{٢}\right)$

أى أنه يقطع جزءًا طوله = $\frac{٣}{٢}$ وحدة طولية من الجزء الموجب لمحور الصادات.

- المستقيم الذى معادلته : ٣ س + ص + ٤ = ٠ .

ميله = –٣ ، ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، –٤)

أى أنه يقطع جزءًا طوله = ٤ وحدات طولية من الجزء السالب لمحور الصادات.

مثال ٢

إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (–١ ، ٧) ، (٩ ، ٣) عموديًا على المستقيم الذى معادلته : س + ك ص – ١٣ = ٠ فأوجد قيمة : ك

الحل

بفرض أن : ميل المستقيم المار بالنقطتين (–١ ، ٧) ، (٩ ، ٣) هو $م_١$

∴ $م_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٧}{٩ - (-١)} = \frac{-٤}{١٠} = \frac{-٢}{٥}$

وبفرض أن : ميل المستقيم الذى معادلته : س + ك ص – ١٣ = ٠ هو $م_٢$

∴ $م_٢ = \frac{-أ}{ب} = \frac{-١}{ك}$

∵ المستقيمان متعامدان   ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$ ∴ $\frac{-٢}{٥} \times \frac{-١}{ك} = -١$

∴ $\frac{٢}{٥ك} = -١$ ∴ –٥ ك = ٢   ∴ ك = $\frac{-٢}{٥}$

حاول بنفسك ١

(١) إذا كان المستقيمان : ٣ ص + س – ٧ = ٠ ، ص = ك س + ٥ متعامدين فأوجد : قيمة ك

(٢) مستقيم معادلته : ٣ س – ٣ ص + ٥ = ٠ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٣) أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم الذى معادلته : ٢ ص = ٣ س + ١٢

ثانياً إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات بهذا المستقيم

المستقيم الذى ميله = م ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، حـ)

تكون معادلته على الصورة : ص = م س + حـ

مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم :

١ الذى ميله = $-\frac{٣}{٤}$ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات طولية.

٢ الذى ميله = ٢ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٧ وحدات طولية.

الحل

ص = م س + حـ

١ ∵ م = $-\frac{٣}{٤}$ ، حـ = ٣ ∴ معادلة المستقيم هى : ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + ٣

٢ ∵ م = ٢ ، حـ = −٧ ∴ معادلة المستقيم هى : ص = ٢ س − ٧

مثال ٤

أوجد معادلة المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥° ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جزءاً مقداره ٧ وحدات طول.

الحل

∵ الميل = ظا هـ = ظا ١٣٥° = −١ ∴ معادلة المستقيم المطلوبة هى : ص = −س + ٧

ملاحظات

١ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل و(٠ ، ٠) هى **ص = م س** حيث م ميل المستقيم.

٢ معادلة محور السينات هى **ص = ٠**

٣ معادلة محور الصادات هى **س = ٠**

٤ معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ل) هى **ص = ل**

٥ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ك ، ٠) هى **س = ك**

مثال ٥

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، −١) ، (٢ ، ٢)

الحل

نفرض أن معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + حـ

∵ الميل (م) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$

∴ معادلة المستقيم تصبح على الصورة : ص = ٣ س + حـ

∵ (١ ، −١) تنتمى للمستقيم

∴ −١ = ٣ × ١ + حـ ∴ حـ = −١ − ٣ = −٤

∴ معادلة المستقيم هى : ص = ٣ س − ٤

مثال ٦

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) موازياً المستقيم : ٢ س + ٣ ص − ٦ = ٠

الحل

∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{٣}$

∴ ميل المستقيم المطلوب معادلته = $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هى : ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + حـ

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢) ∴ فهى تحقق معادلته

∴ ٢ = $\frac{-٢}{٣}$ × ١ + حـ ∴ حـ = $\frac{٨}{٣}$

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هى : ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$

مثال ٧

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) عموديًا على الخط المستقيم المار بالنقطتين :

أ(٣ ، -٤) ، ب(٥ ، -٣)

الحل

∵ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب يساوى $\frac{-٣ - (-٤)}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$

∴ ميل المستقيم العمودى = $\frac{-٢}{١}$ = -٢

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هى : ص = -٢ س + حـ

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ∴ فهى تحقق معادلته

∴ ٣ = -٢ × ٢ + حـ ∴ حـ = ٧

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هى : ص = -٢ س + ٧

حاول بنفسك ٢

١ أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءًا موجبًا طوله ٥ وحدات طولية ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (-٢ ، ٣) ، (-١ ، -٦)

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) عموديًا على المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ(٢ ، -٣) ، ب(٥ ، ٤)

مثال ٨

أ ب حـ مثلث رؤوسه النقط أ(١ ، ٢) ، ب(-٢ ، ٣) ، حـ(-٤ ، -٣) ، $\overline{أء}$ متوسط فيه

أوجد : معادلة المستقيم المار بالمتوسط $\overline{أء}$

الحل

∵ $\overline{أء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ ∴ ء منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ ء = $\left(\frac{-٢ + (-٤)}{٢} ، \frac{٣ + (-٣)}{٢}\right)$ = (-٣ ، ٠)

∴ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ ، ء يساوى $\frac{٢ - ٠}{١ - (-٣)} = \frac{١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هى : ص = $\frac{١}{٢}$ س + حـ

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة أ = (١ ، ٢) ∴ فهى تحقق معادلته

∴ ٢ = $\frac{١}{٢}$ × ١ + حـ ∴ حـ = $\frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المستقيم المطلوبة هى : ص = $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٣}{٢}$

حاول بنفسك ٣

أ ب حـ مثلث رؤوسه النقط : أ(-١ ، ٥) ، ب(٤ ، -٢) ، حـ(-٣ ، ٠)

أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عموديًا على $\overline{ب حـ}$

مثال ٩

باستخدام الميل والجزء المقطوع من محور الصادات مثل بيانيًا المستقيم الذى معادلته :

ص = ٢ س - ٣

الحل

ميل المستقيم = ٢ = $\frac{٢}{١}$ = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

، المستقيم يمر بالنقطة حـ (٠ ، -٣)

من النقطة حـ نتحرك أفقيًا نحو اليمين وحدة واحدة (التغير الأفقى (+١)) فنصل إلى النقطة ء

ثم نتحرك رأسيًا لأعلى وحدتين (التغير الرأسى (+٢)) فنصل إلى هـ فيكون $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ هو التمثيل البيانى

لمعادلة المستقيم : ص = ٢ س - ٣

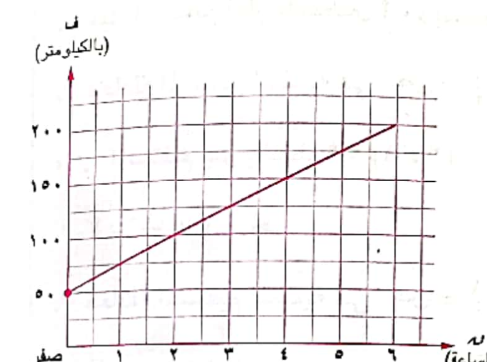
مثال ١٠

الشكل المقابل يمثل حركة سيارة تسير بسرعة منتظمة حيث المسافة (ف) مقيسة بالكيلو مترات ، والزمن (ن) بالساعة أوجد :

١ المسافة عند بدء الحركة.

٢ سرعة السيارة.

٣ معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة السيارة.



الحل

١ المسافة عند بدء الحركة = ٥٠ كيلو متر

٢ سرعة السيارة = ميل الخط البيانى المار بالنقطتين (٠ ، ٥٠) ، (٦ ، ٢٠٠)

$= \frac{٢٠٠ - ٥٠}{٦ - ٠} = \frac{١٥٠}{٦} = ٢٥$ كم/ ساعة

٣ معادلة الخط المستقيم هى : ف = م ن + ح   أى أن : ف = ٢٥ ن + ٥٠

مثال ١١

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولاهما ٣ ، ٤ وحدات طولية على الترتيب ثم أوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم ومحورى الإحداثيات.

الحل

∵ المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٣ وحدات طولية

∴ المستقيم يمر بالنقطة أ (٣ ، ٠)

، ∵ المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٤ وحدات طولية

∴ المستقيم يمر بالنقطة ب (٠ ، ٤)

∴ المستقيم يمر بالنقطتين أ (٣ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤)

ويفرض معادلة المستقيم : ص = م س + ح

حيث الميل : $م = \frac{٤ - ٠}{٠ - ٣} = \frac{-٤}{٣}$ ∴ $ص = \frac{-٤}{٣}$ س + ح

، ∵ ح = ٤   ∴ المعادلة هى : $ص = \frac{-٤}{٣}$ س + ٤

، مساحة Δ أ ب و = $\frac{١}{٢}$ × أ و × ب و = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ وحدات مربعة.

حاول بنفسك ٤

تحرك شخص بسيارته بسرعة منتظمة بين المدينتين أ ، ب

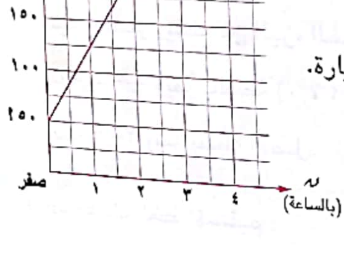
والشكل البيانى المقابل يوضح العلاقة بين المسافة (ف) بالكيلو متر والزمن (ن) بالساعة.

أجب عما يأتى :

١ ما مقدار السرعة المنتظمة للسيارة ؟

٢ أوجد معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة السيارة.

٣ أوجد المسافة التى تبعدها السيارة عن نقطة و (٠ ، ٠) بعد مرور ٣ ساعات من بداية الحركة.



١ أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات بكل من المستقيمات الآتية :

١ ص = ٥ س − ٣
٢ ٢ ص = ٤ − س
٣ ٢ س − ٣ ص − ٦ = ٠
٤ ص + س − ١ = ٠
٥ $\frac{س}{٢}$ + ٣ ص = ٦ (الدقهلية ١٥)
٦ $\frac{س}{٢}$ + $\frac{ص}{٣}$ = ١ (القليوبية ٢٠ ، مطروح ١٩ ، سوهاج ١٨ ، الجيزة ١٦)

٢ أوجد معادلة المستقيم إذا علم أن :

١ ميله = ٢ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات. (السويس ٢٠ ، دمياط ١٩)
٢ ميله = −١ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات.
٣ ميله = ٢ $\frac{١}{٢}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات وحدة واحدة.
٤ ميله = −$\frac{٣}{٤}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٢ $\frac{١}{٢}$ وحدة.
٥ ميله = صفر ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات وحدتين.
٦ ميله = −$\frac{١}{٣}$ ويمر بالنقطة (٠ ، ٢) (المنيا ١٧)
٧ ميله = −٢ ويمر بنقطة الأصل.

٣ أوجد معادلة الخط المستقيم :

١ المار بنقطة الأصل ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°
٢ المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° (الشرقية ١٧)
٣ الذى يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءًا طوله ٣ وحدات ويوازى المستقيم الذى معادلته : ٢ س − ٣ ص = ٦ (البحيرة ١١)
٤ العمودى على المستقيم : ٣ س − ٤ ص + ٧ = ٠ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات جزءًا مقداره ٦ وحدات.

٥ الذى يقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٥ وحدات وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، ١) ، (٢ ، ٧)

٦ الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب. (القليوبية ١٩ ، كفر الشيخ ١٨ ، الأقصر ١٧)

٧ المار بالنقطة (٢ ، −١) وميله يساوى ٢ (القليوبية ١١)

٨ المار بالنقطة (−٢ ، ٣) عموديًا على المستقيم الذى معادلته : ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٥ (الدقهلية ١٣)

٩ المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازى المستقيم : س + ٢ ص − ٧ = ٠ . (أسوان ٢٠)

١٠ المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويوازى المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥ ، ٦) ، (−١ ، ٢) (حلوان ٠٩)

١١ المار بالنقطة (١ ، ٢) عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين

أ (٢ ، −٣) ، ب (٥ ، −٤) (بورسعيد ٢٠ ، السويس ١٩ ، الأقصر ١٨ ، الغربية ١٤)

١٢ المار بالنقطة (٢ ، −٢) عموديًا على المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (الأقصر ١١)

١٣ المار بالنقطتين : (٢ ، −١) ، (١ ، ١) (القليوبية ١٦ ، الغربية ١٣)

١٤ المار بالنقطتين : (٤ ، ٢) ، (−٢ ، −١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل. (القاهرة ١٩ ، البحيرة ١٧)

١٥ الذى ميله يساوى ميل الخط المستقيم : $\frac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات. (السويس ١٩ ، دمياط ١٨)

١٦ العمودى على $\overline{\text{أب}}$ من نقطة أ حيث : أ (−٣ ، ٦) ، ب (٢ ، ١)

١٧ العمودى على $\overline{\text{أب}}$ من نقطة منتصفها حيث : أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥) (قنا ١٨)

١٨ المار بمنتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ حيث : أ = (٤ ، ٨) ، ب = (−٢ ، ٤) ويوازى المستقيم الذى معادلته : ٢ ص = ٤ س − ٥

١٩ الذى يمر بمنتصف القطعة $\overline{\text{أب}}$ حيث : أ (٣ ، ٦) ، ب (−١ ، ٤) عموديًا على المستقيم الذى معادلته : ٢ ص − ٤ س + ١١ = ٠ . (القاهرة ٠٩)

٢٠ المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٤ وحدات. (الشرقية ١٨)

٤ أكمل ما يأتى :

١ ميل المستقيم الذى معادلته : ٣ س – ٤ ص – ١٥ = ٠ هو .... وميل العمودى عليه هو ....

٢ المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ٣ ص – ٦ = ٠ يقطع محور الصادات فى النقطة ....

٣ المستقيم الذى ميله = ٢ ويقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣) معادلته هى ....

(الدقهلية ١١)

٤ معادلة محور السينات هى .... بينما معادلة محور الصادات هى ....

٥ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ويوازى محور السينات هى ....

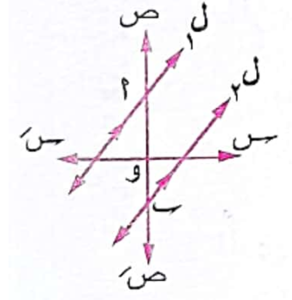
(أسيوط ١٢)

٦ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (–٣ ، ٢) ويوازى محور الصادات هى ....

٧ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –٥) وميله صفر هى ....

٨ معادلة المستقيم الذى يوازى المستقيم : ص = ٢ س – ٣ ويمر بنقطة الأصل هى ....

٩ فى الشكل المقابل :



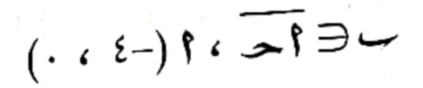
$ل_1$ // $ل_2$ ، أب = ٧ وحدات طول

ومعادلة $ل_1$ هى : ص = ٢ س + ٤

فإن معادلة $ل_2$ هى ....

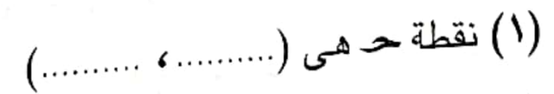
(الشرقية ١٢)

١٠ فى الشكل المقابل :



ب ∈ $\overline{أحـ}$ ، أ(–٤ ، ٠)

، ب(٠ ، ٣) ، أب = ب حـ



(١) نقطة حـ هى (........ ، ....)

(٢) فى Δ و أ ب يكون : ظا أ = ...

(٣) معادلة $\overleftrightarrow{أحـ}$ هى : ص = ... س + ...

(الشرقية ١١)

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ميل المستقيم الذى معادلته : ٣ ص = ٢ س − ٥ هو ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) −٥ (د) $\frac{٢}{٣}$

٢ المستقيم الذى معادلته : ٣ س − ٣ ص + ٥ = ٠ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها .... (المنوفية ١١)

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٣ المستقيم الذى معادلته : ٢ س − ٣ ص − ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله .... وحدة طول. (القليوبية ١٨ ، قنا ١٧ ، القاهرة ١٤ ، الفيوم ١٣)

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

٤ المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ٥ ص − ١٠ = ٠ يقطع من محور السينات جزءًا طوله يساوى .... وحدة طول. (الدقهلية ١١)

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٥

٥ معادلة المستقيم الذى يقطع جزءًا طوله ٤ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات ويوازى المستقيم : ص = ٣ س + ٥ هى ....

(أ) ص = ٣ س + ٤ (ب) ص = ٤ س + ٣

(جـ) ص = ٣ س − ٤ (د) ص = −٣ س + ٤

٦ المستقيمان : ص = ٣ س − ٥ ، ٢ ص = ٦ س + ٥

هما مستقيمان .... (الجيزة ٠٩)

(أ) متوازيان. (ب) منطبقان.

(جـ) متقاطعان وغير متعامدين. (د) متعامدان.

٧ إذا كان المستقيمان : ٣ س − ٤ ص − ٣ = ٠ ، ك ص + ٤ س − ٨ = ٠ متعامدين فإن : ك = ... (البحر الأحمر ١٩ ، الجيزة ١٦ ، البحيرة ١٥)

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٤

٨ إذا كان المستقيمان : س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متوازيين

فإن : ك = ... (المنيا ١٩ ، قنا ١٧ ، سوهاج ١٦ ، الدقهلية ١٥)

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

٩ إذا كان المستقيم الذى معادلته : ص = ك س + ٥ يوازى محور السينات (الغربية ١٨)

فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١٠ المستقيمان : ص = أ س + ب ، ص = حـ س + ء متعامدان (سوهاج ١٦ ، الغربية ٠٨)

فإن : .... = −١

(أ) أ × ء (ب) ب × حـ (جـ) أ × حـ (د) ب × ء

١١ المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٤) ، (١ ، ٥) عمودى على المستقيم ....

(أ) ٤ س = ٣ − ٤ ص (ب) ٥ ص + س = ٤

(جـ) ص = ٤ س (د) س + ٢ ص = ٤

١٢ ميل المستقيم الذى معادلته : ٣ ص = أ س − ٥ ويمر بالنقطة (٢٠ ، ٥) هو ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{٣}$

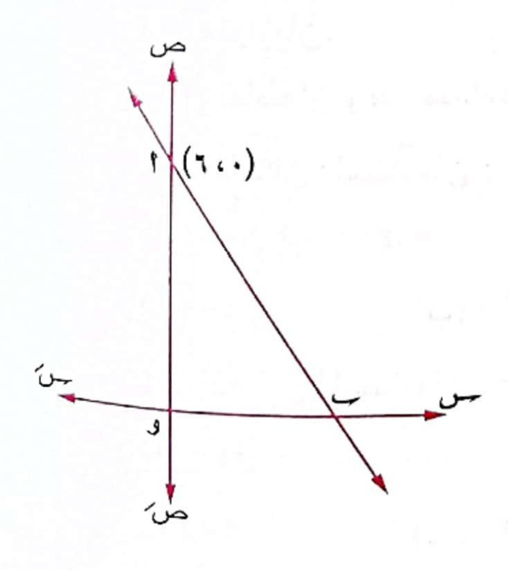
١٣ إذا كان المستقيم الذى معادلته : أ س + (٢ − أ) ص = ٥ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٤) ، (٣ ، ٥) فإن : أ = ... (كفر الشيخ ٢٠)

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ٤

١٤ مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات : ٣ س − ٤ ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ تساوى .... (الفيوم ٢٠ ، القليوبية ١٥)

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) −٦

١٥ فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المثلث أ و ب تساوى ٩ وحدات مربعة فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى .... (المنوفية ١٧)

(أ) ص = ٢ س + ٦

(ب) ص = ٦ − ٢ س

(جـ) ص = ٢ س − ٦

(د) ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٦

١٦ في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ ء مربع

، معادلة المستقيم $ل_١$: ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ١

، معادلة المستقيم $ل_٢$: ص = ك س + ١٤

فإن : ك = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$

---

٦ أثبت أن : المستقيم المار بالنقطتين : أ (٣ ، ١) ، ب (١ ، ٢)

يكون موازيًا المستقيم : ٢ س + ٤ ص − ٣ = ٠ . (الشرقية ١٧)

---

٧ أثبت أن المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ص + ٨ = ٠

عمودى على المستقيم المار بالنقطتين : أ (٢ ، ٣) ، ب (−٢ ، ١) (أسوان ١٢)

---

٨ أوجد معادلتى المستقيمين اللذين يمران بالنقطة (−٣ ، ٢) ويوازيان المحورين.

---

٩ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها الخط المستقيم : ٣ س − ٢ ص + ٦ = ٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ثم أوجد إحداثيى نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

---

١٠ إذا كان المستقيم ل : ٢ س − ٣ ص − ٦ = صفر يقطع محور السينات عند النقطة أ ومحور الصادات عند النقطة ب **أوجد :**

١ إحداثيى النقطتين أ ، ب

٢ معادلة الخط المستقيم المار بنقطة منتصف $\overline{أب}$ ويوازى محور الصادات. (الشرقية ١٣)

---

١١ إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٢ ، −١) ، (٥ ، ١) يوازى المستقيم الذى معادلته :

أ س + ٣ ص + ٥ = ٠ . **أوجد قيمة أ :** (الغربية ١٨) «−٢»

---

١٢ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (٦ ، −٣) عموديًا على المستقيم الذى معادلته :

٥ ص − أ س + ٣ = ٠ . **فأوجد قيمة أ :** «١»

١٣ إذا كانت : أ (٢ ، -٣) ، ب (٥ ، ص) فأوجد قيمة ص إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى المستقيم ل : ٣ ص - ٤ س + ١ = ٠

«١»

١٤ إذا كان المستقيم : ص - (٢ ك - ١) س = ٧ ، المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° متوازيين فأوجد قيمة ك (الشرقية ١٦) «١»

١٥ أوجد معادلة محور تماثل القطعة المستقيمة $\overline{س ص}$ حيث س (٣ ، -٢) ، ص (-٥ ، ٦)

(بورسعيد ١٤ ، الدقهلية ١٢)

١٦ أ (٥ ، -٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، -٣) ، فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{ب حـ}$

(الفيوم ٢٠ ، بورسعيد ١٩)

١٧ أ ب حـ مثلث رءوسه النقط أ = (٠ ، ٦) ، ب = (٥ ، -١) ، حـ = (-٢ ، ١) أوجد معادلة المستقيم المار بالرأس أ عموديًا على $\overline{ب حـ}$

١٨ أ ب حـ مثلث فيه : أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، -٢) ، حـ (٣ ، ٤)
، ء منتصف $\overline{أب}$ ، رسم $\overline{ء هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى هـ ، أوجد :

[١] طول $\overline{ء هـ}$
[٢] معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ء هـ}$

(مطروح ١٨ ، الإسكندرية ١٥)

١٩ أ ب حـ ء مربع فيه : أ = (٥ ، ٤) ، حـ = (-١ ، ٦) فأوجد معادلة : $\overleftrightarrow{ب ء}$

(المنوفية ١٥)

٢٠ أ ب حـ ء معين ، م نقطة تقاطع قطريه حيث : أ (١ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠)
أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب ، ء

(أسوان ٠٩)

٢١ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : أ (٢ ، ٣) ، ب (-١ ، -٣)
، ثم بيِّن أنه لأى نقطة حـ (٢ ك + ١ ، ٤ ك + ١) فإن : حـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

(الدقهلية ١٤)

٢٢ ارسم الخط المستقيم فى كل من الحالات الآتية :

[١] ميله يساوى $\frac{-١}{٢}$ ويقطع جزءًا من الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى وحدة واحدة.

[٢] ميله يساوى ٢ ويقطع جزءًا من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوى ٣ وحدات.

[٣] يقطع من الجزءين الموجبين للمحورين السينى والصادى جزءين طولاهما ٢ ، ٣ من الوحدات على الترتيب.

مستقيم معادلته : ص − ٢ س − ٣ = ٠ .
أوجد ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات وارسم هذا المستقيم. (حلوان ١١)

من الشكل المقابل أوجد :

[١] ميل الخط المستقيم (م)

[٢] طول الجزء المقطوع من محور الصادات حـ

[٣] معادلة الخط المستقيم بمعلومية م ، حـ

[٤] طول الجزء المقطوع من محور السينات.

[٥] مساحة المثلث المحدد بالخط المستقيم والجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات.

٢٥ الجدول المقابل يمثل علاقة خطية :

[١] أوجد معادلة الخط المستقيم.

[٢] أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

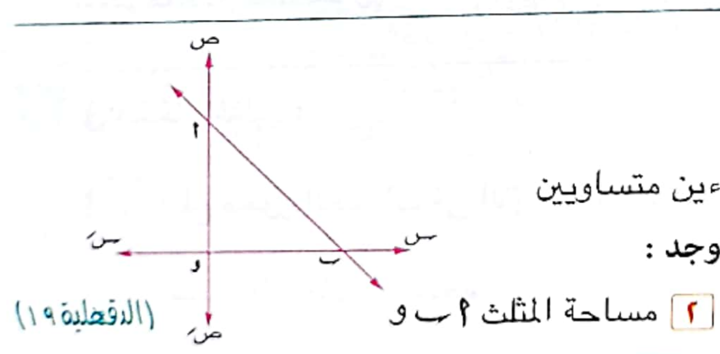
[٣] أوجد قيمة أ

س	١	٢	٣
ص = د (س)	١	٣	أ

(الإسكندرية ١٥ ، القليوبية ١٣)

٢٦ الشكل المقابل يمثل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ الذى معادلته ص = ك س + حـ ويقطع من محورى الإحداثيات جزءين متساويين فى الطول ويمر بالنقطة (٢ ، ٣) أوجد :

[١] قيمة ك ، حـ
[٢] مساحة المثلث أ ب و

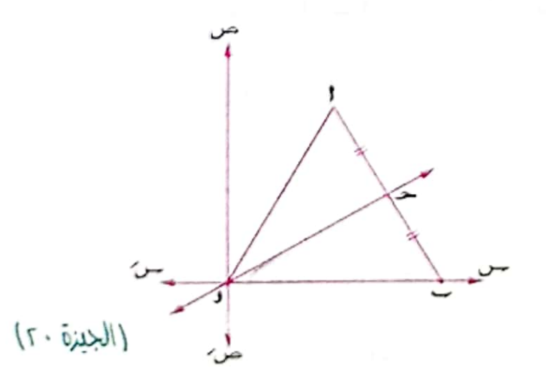


(الدقهلية ١٩)

٢٧ فى الشكل المقابل :

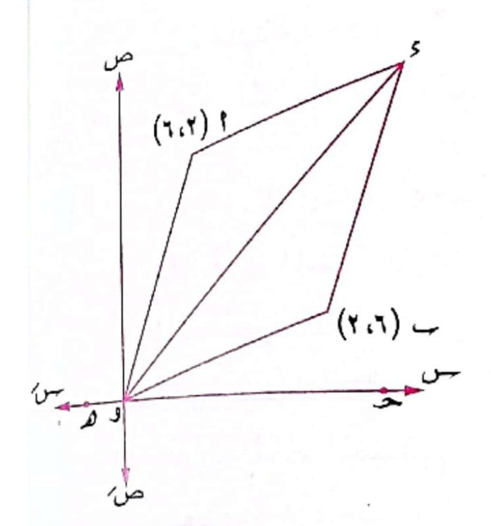
أ ب و مثلث متساوى الأضلاع ، حـ منتصف $\overline{أب}$

أوجد معادلة $\overleftrightarrow{وحـ}$



(الجيزة ٢٠)

٢٨ في الشكل المقابل :



النقط أ (٢ ، ٦) ، و (٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٢) ، ء

هي رؤوس معين

أوجد :

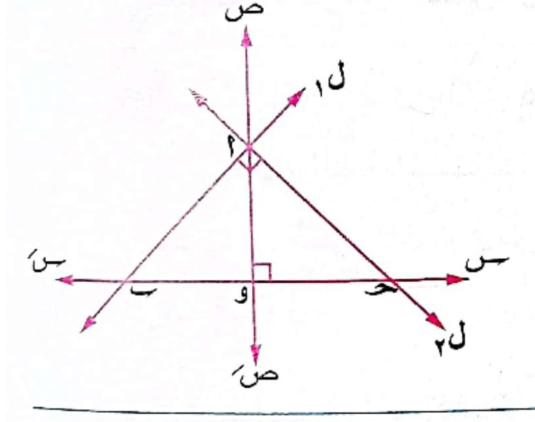
[١] إحداثيي النقطة ء

[٢] معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{وء}}$

[٣] ق (∠ ء و هـ)

(الشرقية ١٤)

٢٩ في الشكل المقابل :

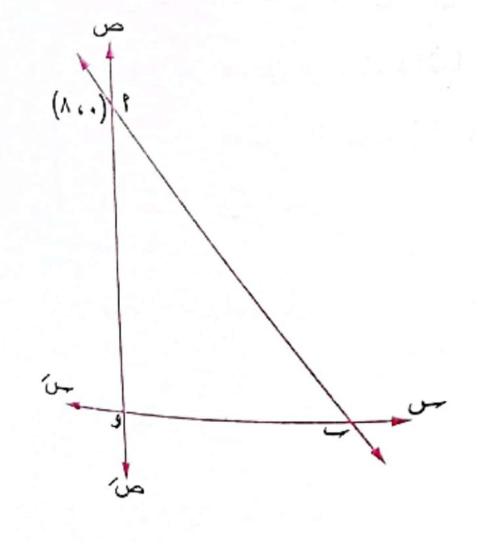


إذا كان : ل١ ⊥ ل٢

، ومعادلة ل١ : ٢ س − ص + ٢ = ٠

أوجد معادلة المستقيم ل٢

٣٠ في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع محور الصادات في النقطة أ (٠ ، ٨)

ويقطع محور السينات في النقطة ب

فإذا كان : ظا (∠ أ ب و) = $\frac{٤}{٣}$ أوجد :

[١] أولاً : ق (∠ ب أ و)

ثانيًا : إحداثيي النقطة ب

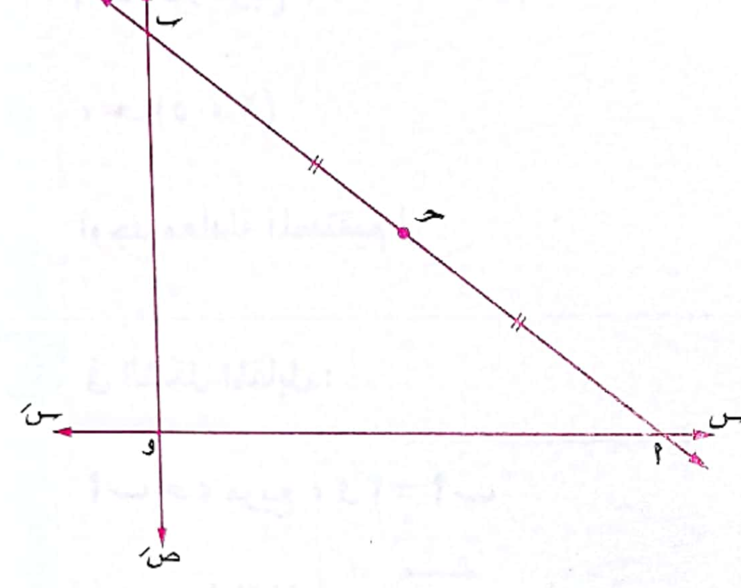
[٢] أولاً : ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

ثانيًا : معادلة المستقيم المار بالنقطة و ، وعموديًا على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(الشرقية ١٣)

٣١ في الشكل المقابل :

النقطة حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث : حـ (٤ ، ٣)



[١] أوجد إحداثيي كل من : و ، أ ، ب

[٢] أوجد طول كل من : $\overline{\text{وأ}}$ ، $\overline{\text{وب}}$

، $\overline{\text{حـأ}}$ ، $\overline{\text{حـب}}$ ، $\overline{\text{حـو}}$

[٣] أوجد ميل كل من :

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وأ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وب}}$

[٤] أوجد معادلة كل من : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـو}}$

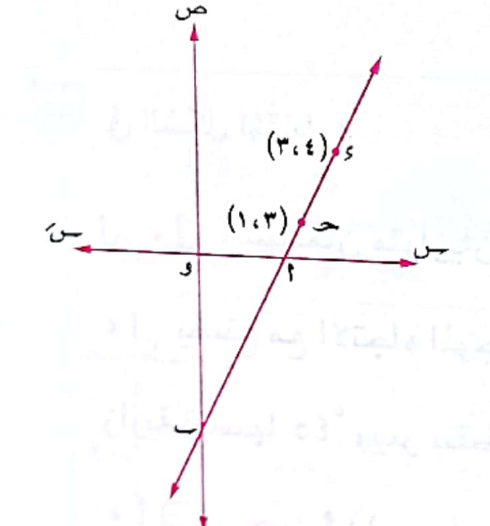
٣٢ في الشكل المقابل :

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يمر بالنقطتين حـ (٣ ، ١) ، ء (٤ ، ٣)

ويقطع محوري الإحداثيات في أ ، ب على الترتيب.

أوجد طول كل من : $\overline{\text{أو}}$ ، $\overline{\text{وب}}$

حيث و نقطة الأصل.



٣٣ في الشكل المقابل :

«و» هي نقطة الأصل

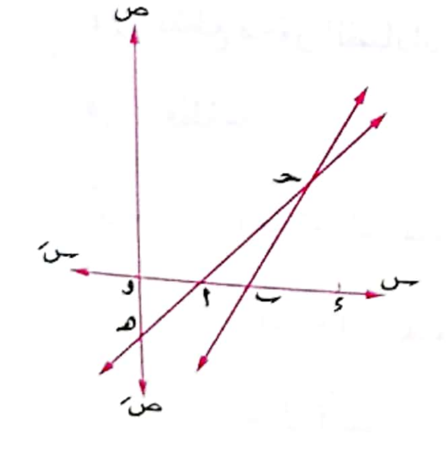
أ ، ب ، ء ∈ محور السينات ،

ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $\sqrt{3}$ ، معادلة $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ هي : س − ص = ٣

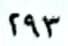
[١] أوجد : ميل $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، طول $\overline{\text{وهـ}}$

[٢] أوجد : ق (∠ حـ ب ء) ، ق (∠ حـ أ ء)

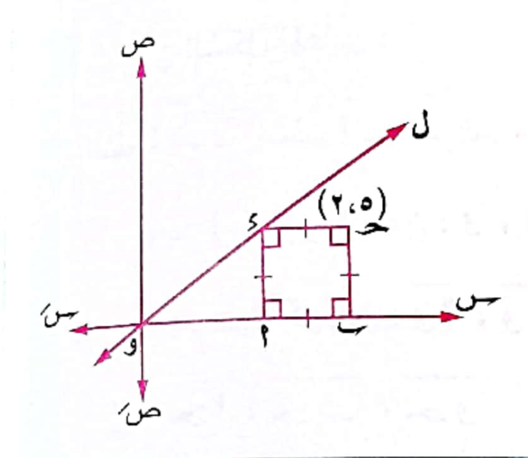
[٣] استنتج : ق (∠ أ حـ ب)



(الشرقية ١٦)



٣٤ في الشكل المقابل :

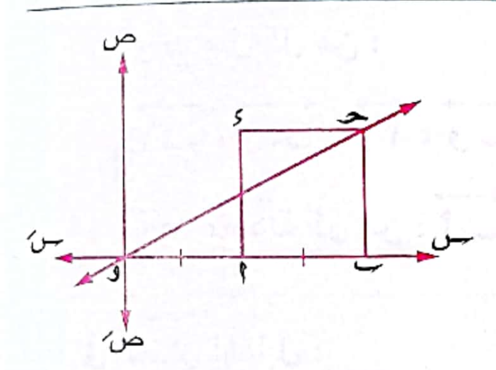


أبحـء مربع ، ء ∈ المستقيم ل

، حـ(٥ ، ٢)

أوجد معادلة المستقيم ل

٣٥ في الشكل المقابل :



أبحـء مربع ، وأ = أب

أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{وحـ}}$

٣٦ في الشكل المقابل :

ل$_١$ ، ل$_٢$ مستقيمان متوازيان

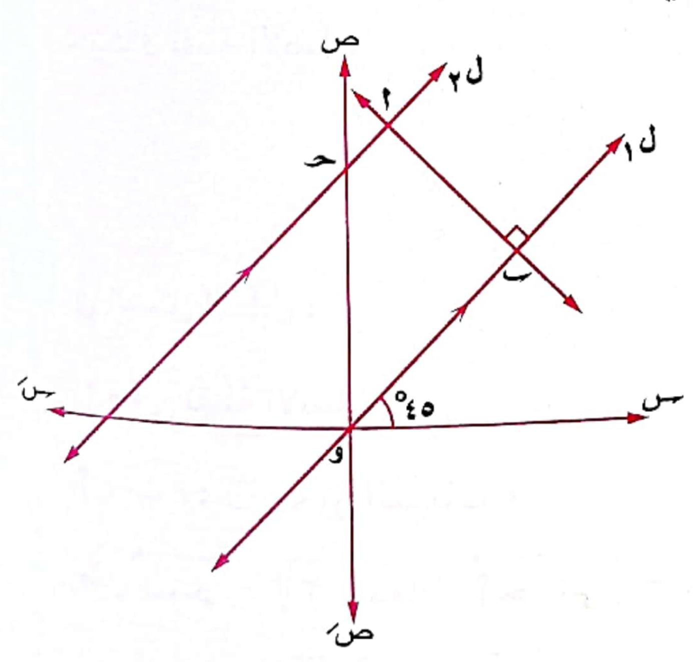
، ل$_١$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

زاوية قياسها ٤٥° ويمر بنقطة الأصل و

، أ ∈ ل$_٢$ حيث أ (١ ، ٥) ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ ل$_١$

، ل$_٢$ يقطع محور الصادات

في النقطة حـ



أوجد : [١] معادلة المستقيم ل$_١$

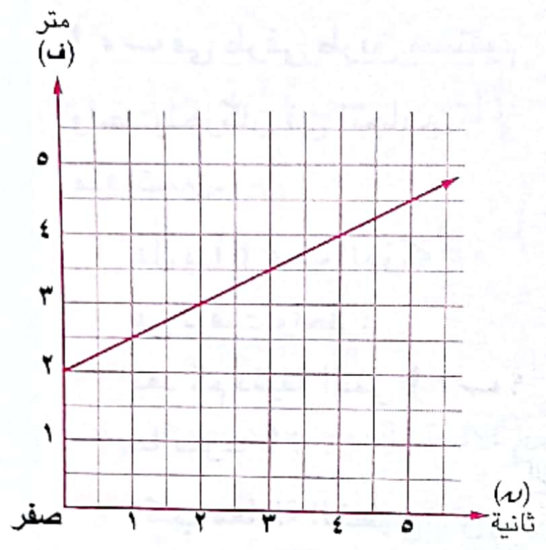
[٢] معادلة المستقيم ل$_٢$

[٣] طول $\overline{\text{أب}}$

(الشرقية ١٥)

تطبيقات حياتية

٣٧ الشكل المقابل يمثل حركة جسيم



يتحرك بسرعة منتظمة (ع) حيث

المسافة (ف) مقيسة بالمتر

والزمن (ن) بالثانية.

أوجد : ١ المسافة عند بدء الحركة.

٢ سرعة الجسيم.

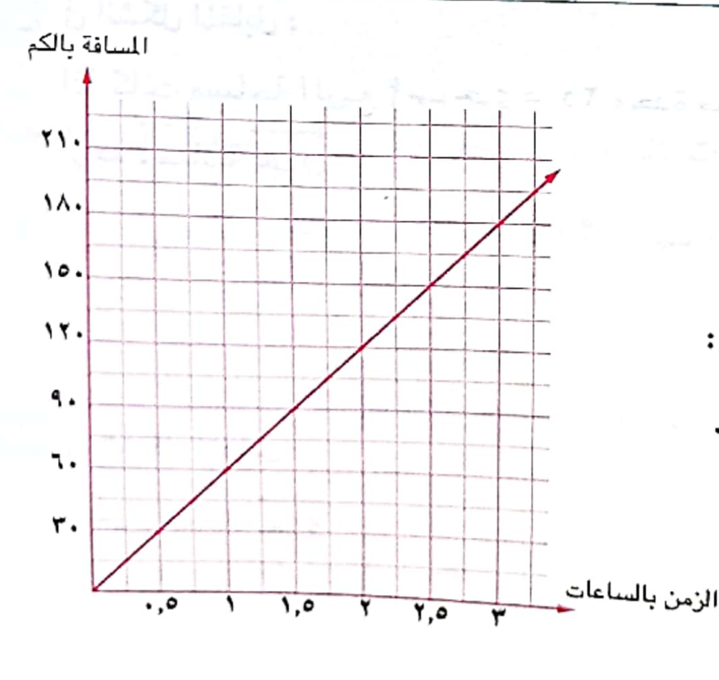
٣ معادلة الخط المستقيم الممثل لحركة الجسيم.

٤ المسافة المقطوعة بعد ٤ ثوان من بدء الحركة.

٥ الزمن الذى يقطع فيه الجسيم مسافة ٣,٥ من المتر من بدء الحركة.

---

٣٨ الشكل المقابل يمثل العلاقة بين



المسافة (ف) التى تقطعها سيارة

بالكيلو متر والزمن (بالساعة)

الذى قطعت فيه هذه المسافة. أوجد :

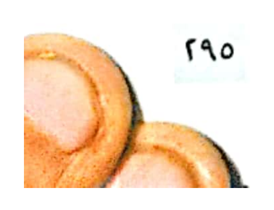
١ المسافة المقطوعة بعد ٩٠ دقيقة.

٢ الزمن الذى قطعت فيه السيارة

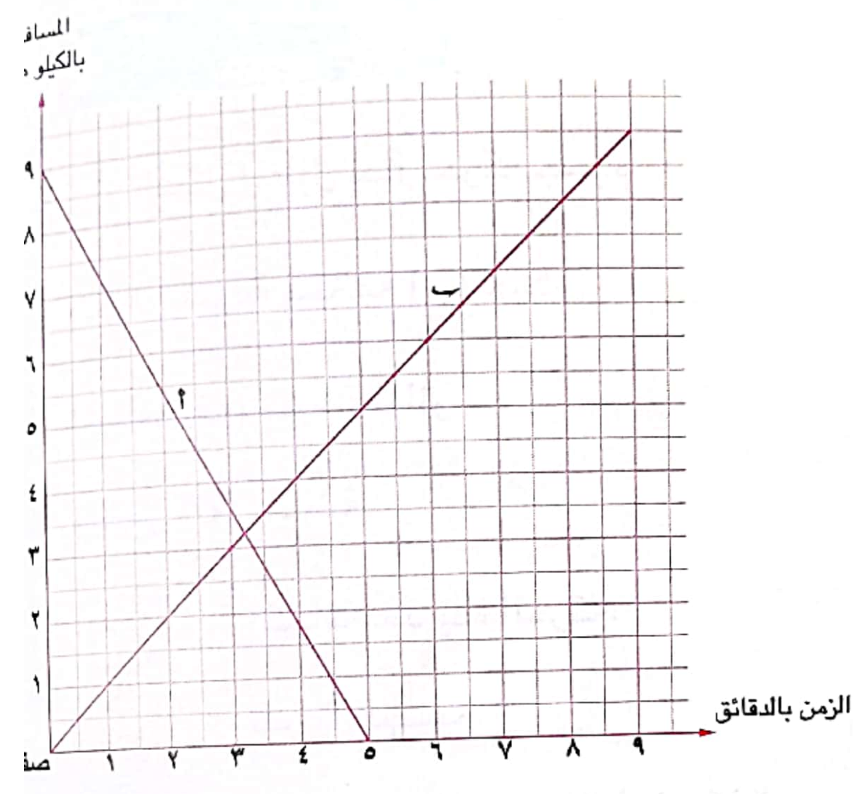
١٥٠ كيلو مترًا.

٣ سرعة السيارة.

٤ معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن.



٣٩ الشكل المقابل يمثل العلاقة بين المسافة (ف) بالكيلو مترات والزمن (ن) بالدقائق لجسمين أ ، ب فى طرفى طريق مستقيم واحد يتحركان فى اتجاهين متعاكسين.



١ هل بدأ أ ، ب الحركة فى توقيت واحد ؟

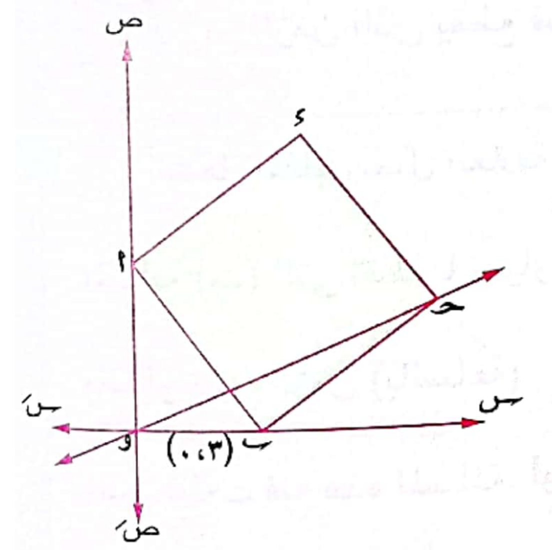
٢ بعد كم دقيقة التقى أ ، ب ؟

٣ ما سرعة أ ؟

٤ اكتب معادلة الخط المستقيم الذى يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لحركة الجسم ب

للمتفوقين

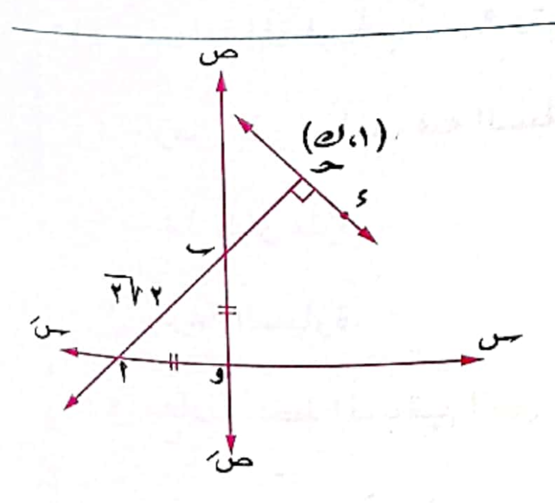
٤٠ فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المربع أ ب حـ ء = ٢٥ وحدة مربعة

أوجد : معادلة $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$

٤١ فى الشكل المقابل :



أوجد : معادلة $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

ملخص الوحدة الخامسة



✪ إذا كانت : $أ(س_١ ، ص_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢)$ فإن :

• طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{(\text{فرق السينات})^٢ + (\text{فرق الصادات})^٢}$ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

• نقطة منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

• ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = ظا هـ

(حيث هـ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها $\overleftrightarrow{أب}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات)

✪ إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن :

• $ل_١ // ل_٢$ إذا كان : $م_١ = م_٢$ والعكس صحيح.

• $ل_١ \perp ل_٢$ إذا كان : $م_١ \times م_٢ = -١$ والعكس صحيح.

✪ إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة : ص = م س + حـ فإن :

• ميل الخط المستقيم = م

• طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم = |حـ| والمستقيم يمر بالنقطة (٠ ، حـ)

✪ إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة : أ س + ب ص + حـ = ٠ فإن :

• ميل الخط المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-أ}{ب}$

• طول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم = $\left|\frac{-حـ}{ب}\right|$

والمستقيم يمر بالنقطة $\left(٠ ، \frac{-حـ}{ب}\right)$

✪ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل و(٠ ، ٠) هى : ص = م س حيث م الميل.

✪ معادلة محور السينات هى ص = ٠



امتحانات على الوحدة الخامسة



أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ بُعد النقطة (–٧ ، –٣) عن محور الصادات يساوى .... وحدة طول.

(أ) –٧ (ب) –٣ (جـ) ٧ (د) ٣

٢ النقطة (٠ ، ٤) تنصف البعد بين النقطتين (–١ ، –١) ، (س ، ص)

فإن النقطة (س ، ص) هى ....

(أ) (١ ، ٩) (ب) (–١ ، ٩) (جـ) $\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$ (د) (–١ ، ٣)

٣ مستقيمان متعامدان ميل أحدهما $\frac{-١}{٤}$ وميل الآخر ٤ ك فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) –٤ (د) $\frac{١}{٤}$

٤ ميل المستقيم : س – ٥ = صفر هو ....

(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) غير معرف. (د) صفر

٥ فى الشكل المقابل :

جـ (٣ ، ٤) منتصف $\overline{أب}$

فإن : و أ = ... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٦ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (س ، –١) ، (٤ ، ٢) يوازى المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (–٣ ، –٢) فإن : س = ...

(أ) –٣ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ١

٢ (أ) أ ب حـ ء شكل رباعى حيث أ (−١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٧ ، ٤)
، ء (١ ، ٦) أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع.

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) عموديًا على المستقيم :
٥ س − ٢ ص + ٧ = ٠ .

٣ (أ) إذا كانت النقطة أ (٥ ، ٢) تقع على الدائرة التى مركزها م (١ ، −١) فأوجد :

١ مساحة الدائرة بدلالة π

٢ معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ ، م

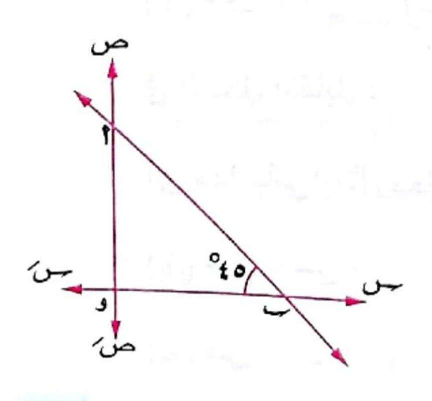
(ب) إذا كانت النقط أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٣) ، حـ (−١ ، −٢) ، ء (−٢ ، ٣)
هى رؤوس معين أوجد إحداثيى نقطة تقاطع القطرين وأوجد مساحة سطحه.

٤ (أ) إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوى ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول
فما قيمة س ؟

(ب) أثبت أن : النقط أ (−٣ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، −٦) هى رؤوس مثلث
متساوى الساقين رأسه أ
، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على $\overline{\text{ب حـ}}$

٥ (أ) أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين : (٣ ، ٧) ، (٦ ، ١٣)

(ب) فى الشكل المقابل :
المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقطع من المحور السينى
جزءًا طوله ٣ وحدات طول
، ق (∠ أ ب و) = ٤٥°
أوجد : معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$





أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ (−٤ ، −١) ، حـ (٤ ، ٥)

فإن : طول $\overline{\text{ب ء}}$ = ... وحدة طول.

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٤

٢ إذا كانت : (٤ ، −٣) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٣ ، −٤) فإن : ب هى ....

(أ) (٥ ، −٢) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٢) (د) (٥,٣ ، −٥,٣)

٣ إذا كان المستقيمان : ٣ س − ٤ ص − ٣ = ٠

، ك س + ٣ ص − ٨ = ٠ متعامدين فإن : ك = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٤

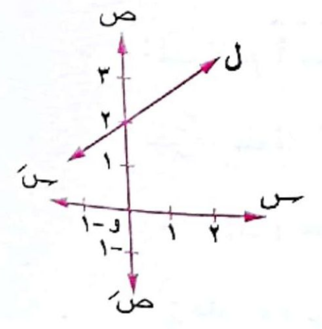
٤ المستقيم الذى معادلته : ٢ س − ٣ ص − ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله .... وحدة طول.

(أ) −٦ (ب) −٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ٢

٥ معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٢ (ب) ص = −٣ (جـ) س = −٢ (د) ص = ٣

٦ فى الشكل المقابل :



أى مما يأتى يمثل معادلة المستقيم ل ؟

(أ) ص = س (ب) ص = ٢

(جـ) ص + س = ٢ (د) ص − س = ٢

(أ) إذا كان أ ب حـ ء مربع حيث أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، صفر) ، حـ (-٧ ، ٥)

أوجد : [١] إحداثيى النقطة ء [٢] مساحة المربع أ ب حـ ء

(ب) فى الشكل المقابل :

المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازى محور الصادات

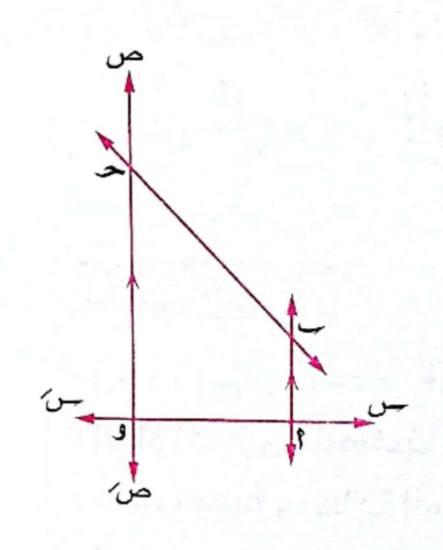
، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ معادلته ص = -س + ٣

، النقطة ب (٢ ، ١) أوجد :

[١] طول $\overline{\text{ب حـ}}$

[٢] مساحة الشكل و أ ب حـ

[٣] ق (∠ و حـ ب)



---

٣ (أ) أثبت أن : النقط أ (-٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) ، حـ (-٤ ، ٢) ليست على استقامة واحدة.

(ب) إذا كانت : أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٥ ، ١) وكانت أ ب = ب حـ

فأوجد قيمة : س

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

فى المستوى الأحداثى المتعامد رسم المثلث أ ب حـ

أثبت أن :

△ أ ب حـ قائم الزاوية وأوجد مساحته.

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، -٢) ، حـ (٣ ، ٤)

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ وعموديًا على $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

---

٥ (أ) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ (٠ ، ٦) ، ب (-١ ، ٣) ، حـ (٥ ، ١)

، ء (٦ ، ٤) أثبت باستخدام الميل أن الشكل أ ب حـ ء مستطيل.

(ب) إذا كان محور تماثل $\overline{\text{حـ ء}}$ يمر بالنقطة أ (٦ ، م) حيث حـ (٣ ، ١) ، ء (-٣ ، ٧)

فأوجد : قيمة م

أهداف المشروع

- إيجاد البعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى المتعامد.
- إيجاد إحداثيى منتصف قطعة مستقيمة.
- حساب محيط ومساحة المثلث.
- إيجاد ميل الخط المستقيم.
- الربط بين الهندسة والتاريخ.

المطلوب

« الهندسة التحليلية هى أحد فروع الرياضيات التى تستخدم نظام الإحداثيات فى دراسة الهندسة »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- اكتب نبذة عن العالم رينيه ديكارت الذى نُسب إليه نظام الإحداثيات الديكارتية، وإنجازاته فى مجال الرياضيات.
- على ورقة رسم بيانى ارسم محورى الإحداثيات.
- حدد على الشبكة البيانية ثلاثة نقاط تمثل رؤوس مثلث متساوى الساقين ، ثم أوجد :

(١) محيط المثلث.

(٢) مساحة المثلث.

(٣) ميل كل ضلع من أضلاع المثلث.

(٤) معادلة الخط المستقيم الذى يحمل كل ضلع من أضلاع المثلث.



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد أقطار الشكل السداسى يساوى .... (قنا ٢٠ ، الأقصر ١٦)

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) ٩

٢ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين .... (الإسكندرية ١٦ ، ج. سيناء ١٧ ، ش. سيناء ١٧)

(أ) متطابقتان. (ب) متكاملتان.

(جـ) متقابلتان بالرأس. (د) متناظرتان.

٣ قياس الزاوية الخارجة عند رأس من رؤوس مثلث متساوى الأضلاع يساوى .... (القاهرة ٢٠ ، كفر الشيخ ١٩ ، بنى سويف ١٨ ، الإسكندرية ١٧)

(أ) ٦٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٣٠°

٤ عدد محاور التماثل فى المثلث المتساوى الساقين يساوى .... (الإسكندرية ١٨ ، مطروح ١٧)

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٥ فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ب) = ٩٠° ، ق (∠أ) = ٦٠°

، $\overline{بء}$ متوسط

فإن : ق (∠ء ب حـ) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٥°

٦ المثلث الذى أطوال أضلاعه ٥ سم ، ٥ سم ، .... سم مثلث متساوى الساقين. (المنيا ١٧)

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٢

٧ مثلث أطوال أضلاعه ٥ سم ، ١٢ سم ، ١٣ سم تكون مساحته = ... سم^{2} (مطروح ١٨)

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢,٥ (جـ) ٧٨ (د) ١٤٤

٨ مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث .... طول الضلع الثالث. (المنيا ١٩ ، الفيوم ١٨)

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (جـ) يساوى (د) ضعف

٩ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم المتوسط بنسبة .... من جهة القاعدة. (الفيوم ١٨)

(أ) ١ : ٣ (ب) ٢ : ١ (جـ) ٣ : ١ (د) ١ : ٢

١٠ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى .... (الفيوم ١٩ ، أسيوط ١٨)

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٢٧٠° (د) ٣٦٠°

١١ إذا كان أ ب جـ د مربعًا فإن : ق (∠ د جـ أ ب) = ... (البحيرة ١٨ ، الإسكندرية ١٧)

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

١٢ معين طولا قطريه ٦ سم ، ١٠ سم تكون مساحته .... سم^{2} (كفر الشيخ ١٧)

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٥ (د) ١٠

١٣ صورة النقطة (–٤ ، ٥) بالانتقال (٢ ، –٣) هى .... (كفر الشيخ ١٧)

(أ) (–٢ ، –٢) (ب) (٢ ، –٢) (جـ) (٢ ، ٢) (د) (–٢ ، ٢)

١٤ صورة النقطة (–٢ ، ٥) بالانعكاس فى محور السينات هى .... (الإسماعيلية ١٦)

(أ) (–٢ ، –٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٢ ، –٥) (د) (٥ ، –٢)

١٥ الشكل الرباعى الذى قطراه متساويان فى الطول ومتعامدان هو .... (بنى سويف ٢٠)

(أ) المربع. (ب) المعين. (جـ) المستطيل. (د) متوازى الأضلاع.

١٦ حجم متوازى المستطيلات الذى أبعاده $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٦}$ من السنتيمترات يساوى .... سم^{٣} (ج.سيناء ١٦)

(أ) ٢ $\sqrt{٦}$ (ب) ٣ $\sqrt{٦}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٢}$ (د) ٦

١٧ إذا كان ٣ ، ٧ ، ل أطوال أضلاع مثلث فإن ل يمكن أن تساوى .... (سوهاج ٢٠)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٠

١٨ Δ أ ب جـ فيه : ق (∠ ب) = ٣ ق (∠ أ) = ٩٠° فإن : ق (∠ جـ) = ... (أسوان ١٦)

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

١٩ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ق (∠ ب) > ق (∠ جـ) فإن .... (السويس ١٦)

(أ) أ جـ − أ ب > ٠ (ب) أ جـ − أ ب ≥ ٠

(جـ) ب جـ ≥ أ ب (د) أ جـ − أ ب < ٠

٢٠ محيط الدائرة التى طول قطرها ١٤ سم يساوى .... سم. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ (الفيوم ١٧)

(أ) ٧ (ب) ٢٢ (جـ) ٤٤ (د) ١٤

٢١ إذا كان : ق (∠ س) = ق (∠ ص) ، ∠ س ، ∠ ص متتامتين فإن : ق (∠ س) = ... (ش.سيناء ١٧)

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

٢٢ إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ فإن : س أ .... س ب (السويس ٢٠)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ⊥

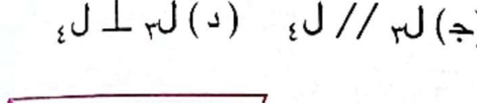
٢٣ أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ٢٠٠° فإن : ق (∠ ب) = ... (السويس ١٩ ، الإسكندرية ١٨ ، الإسماعيلية ١٧)

(أ) ٥٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٦٠°

٢٤ إذا كان : أ ب جـ د متوازى أضلاع فإن : أ ب + جـ د = ... (السويس ١٨)

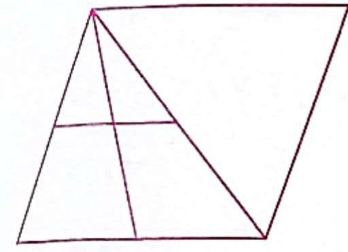
(أ) ٢ أ جـ (ب) ٢ ب جـ (جـ) ٢ ب د (د) ٢ جـ د

٢٥ إذا كان : ل١ // ل٢ ، ل٣ ⊥ ل١ ، ل٤ ⊥ ل٢ فإن : .... (البحيرة ١٧)



(أ) ل٢ // ل٣ (ب) ل١ // ل٤ (جـ) ل٣ // ل٤ (د) ل٣ ⊥ ل٤

٢٦ عدد المثلثات الموجودة فى الشكل المقابل

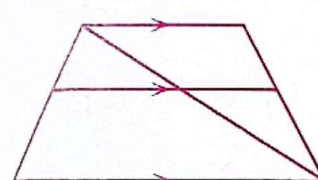


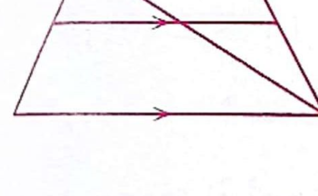
يساوى .... مثلثات. (الوادى الجديد ١٦)

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٧ (د) ٨

٢٧ فى الشكل المقابل :



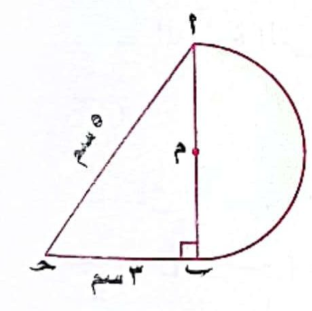


عدد أشباه المنحرف يساوى .... (الأقصر ١٧)

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

٢٨ فى الشكل المقابل :



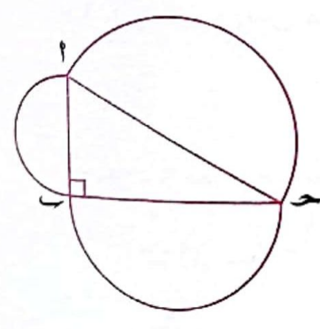
$\overline{أب}$ قطر فى دائرة

فإن مساحة الشكل المظلل تساوى .... سم^2 (السويس ١٦)

(أ) ٤ π (ب) ١٦ π

(جـ) ٢ π (د) ٩ π

٢٩ فى الشكل المقابل :





أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

ما هى مساحة نصف الدائرة التى

تقع على الوتر $\overline{أحـ}$ إذا كانت مساحتا

نصفى الدائرتين الذين يقعان على الضلعين $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$

هما ٣٦ ، ٦٤ وحدة مربعة ؟

(أ) ٨٠ وحدة مربعة. (ب) ٩٦ وحدة مربعة.

(جـ) ١٠٠ وحدة مربعة. (د) ١٢٠ وحدة مربعة.

٣٠ في الشكل المقابل :

عدد المثلثات القائمة المظللة التى تلزم لتغطية سطح المستطيل تمامًا يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٢

٣١ في الشكل المقابل :

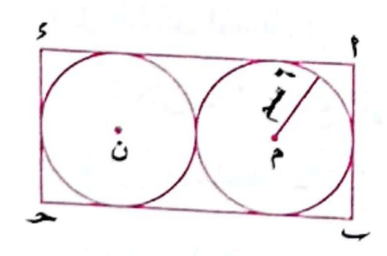
إذا كانت أهـ : هـ د = ١ : ٢

فإن النسبة بين مساحة المثلث ب هـ د إلى مساحة المستطيل أ ب حـ د هى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٣ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٢ : ٥

٣٢ في الشكل المقابل : (أسوان ١٨)

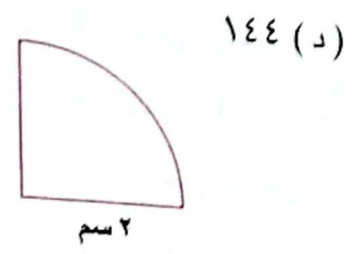
محيط الشكل يساوى .... سم



(أ) ١٧ (ب) ٢٢

(جـ) ٢٩ (د) ٣٤

٣٣ في الشكل المقابل :



مستطيل به دائرتان م ، ن

طول نصف قطر كل منهما ٦ سم

فإن مساحة المستطيل تساوى .... $سم^2$

(أ) ٢٨٨ (ب) ٢٥٢ (جـ) ٢١٦ (د) ١٤٤

٣٤ الشكل المقابل يمثل ربع دائرة طول نصف قطرها ٢ سم



فإن محيط الشكل يساوى .... سم.

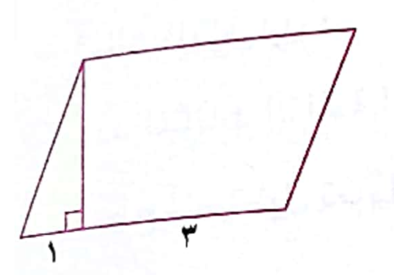
(أ) ٢ π (ب) ٥ π

(جـ) π + ٤ (د) ٤ π + ٤

(الجيزة ١٩)



٣٥ في الشكل المقابل :



إذا قُسمت القاعدة فى متوازى الأضلاع

بنسبة ١ : ٣ فإن نسبة مساحة المثلث المظلل

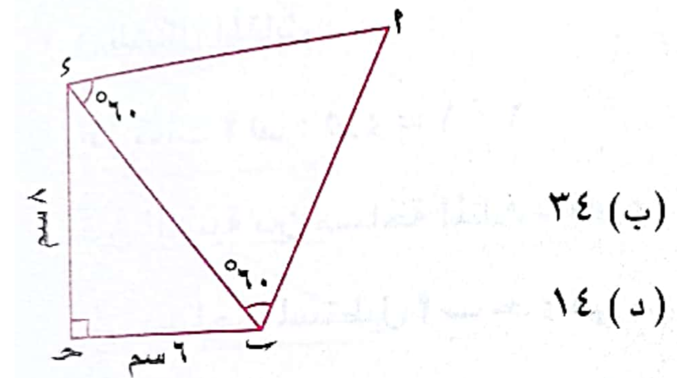
إلى مساحة متوازى الأضلاع هى ....

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٦



(جـ) ١ : ٨ (د) ١ : ٩

٣٦ في الشكل المقابل :

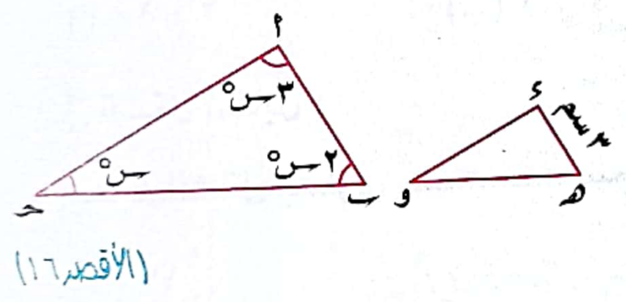


محيط الشكل يساوى .... سم.

(أ) ٤٤ (ب) ٣٤

(جـ) ٢٤ (د) ١٤

٣٧ في الشكل المقابل :



(الأقصر ١٦)

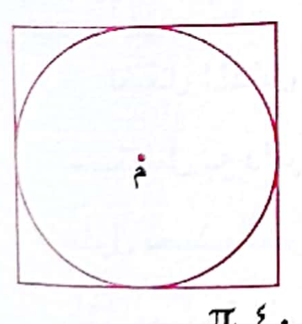
إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

، ء هـ = ٣ سم

فإن : هـ و = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٦

٣٨ في الشكل المقابل :

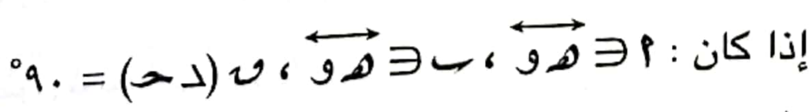


إذا كان طول ضلع المربع = ١٠ سم

فإن : مساحة الدائرة = ... سم^{٢}

(أ) ١٠٠ π (ب) ٢٥ π (جـ) ٥٠ π (د) ٤٠ π

٣٩ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ∈ $\overleftrightarrow{هـ و}$ ، ب ∈ $\overleftrightarrow{هـ و}$ ، ق (∠ حـ) = ٩٠°

فإن : س + ص = ...

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠°

(جـ) ٢٧٠° (د) ٣٦٠°



١ محافظة القاهرة



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أبسط مقاييس التشتت هو ....

(أ) الوسط الحسابى. (ب) الوسيط. (جـ) المدى. (د) المنوال.

٢ $٢ س^٢ \times ٣ س =$ ....

(أ) $٦ س^٣$ (ب) $٥ س^٣$ (جـ) $٦ س^٢$ (د) $٥ س^٢$

٣ إذا كانت : س = {٣} ، ن(ص) = ٥ فإن : ن(س × ص) = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٥

٤ أبسط صورة للمقدار : ٣ س − ٤ ص + ٥ س + ٧ ص هى ....

(أ) ٧ س + ١٢ ص (ب) ١١ س ص

(جـ) ١٠ س + ٩ ص (د) ٨ س + ٣ ص

٥ العلاقة التى تمثل تغيرًا عكسيًا بين المتغيرين ص ، س هى ....

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$ (د) ص = ٢ س

٦ إذا كان : $\sqrt{س} = ٤$ فإن : س = ... حيث $س \in ص_+$

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢ (أ) ارسم منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ متخذًا $س \in [-٣ ، ٣]$ ومن الرسم أوجد :

١ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة. ٢ معادلة محور التماثل.

(ب) أوجد الانحراف المعيارى لمجموعة القيم : ١٥ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٥

٣ (أ) إذا كانت : س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٥ ، ٦}

أوجد : ١ س × ص ٢ (س − ص) × ع

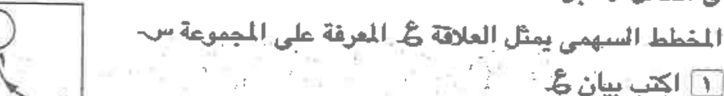
(ب) إذا كانت : س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة أثبت أن : $\frac{ص - س}{س} = \frac{ل - ع}{ع}$



٤ (أ) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٣ : ٥ فإنها تصبح ١ : ٢

(ب) فى الشكل المقابل :

المخطط السهمى يمثل العلاقة ع المعرفة على المجموعة س



[١] اكتب بيان ع

[٢] هل العلاقة ع دالة ؟ وإذا كانت دالة أوجد مداها.

٥ (أ) إذا كانت : ص ∝ س ، وكانت : ص = ٢٠ عندما س = ٤

أوجد : [١] ثابت التناسب بين ص ، س [٢] قيمة س عندما ص = ٤٠

(ب) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ك ، د (٥) = ١٣ أوجد : قيمة ك



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] ضعف العدد $٢^{٨}$ هو ....

(أ) $٢^{١٠}$ (ب) $٢^{١٦}$ (جـ) $٤^{٨}$ (د) $٢^{٩}$

[٢] إذا كان : س ص = ٣ فإن : ص ∝ ....

(أ) س (ب) ٣ س (جـ) $\frac{١}{س}$ (د) $\frac{١}{٣}$ س

[٣] إذا كان : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ ، $(س + ص)^{٢} = ٤٩$

فإن : س ص = ...

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

[٤] إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : د (٣) + د (−٣) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −٦ (د) ٦

[٥] $]-٢ ، ٥[\cup \{-٢ ، ٥\}$ = ...

(أ) $[-٢ ، ٥]$ (ب) $[-٢ ، ٥[$ (جـ) $]-٢ ، ٥]$ (د) $]-٢ ، ٥[$

[٦] المدى لمجموعة القيم : ٥ ، ١٤ ، ٤ ، ٢٣ ، ١٥ هو ....

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ١٩ (د) ٢٣

٢ (أ) إذا كانت : س = {٢ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢} ، ع = {٣}

فأوجد : [١] ن (س × ع) [٢] (ص ∩ س) × ع

(ب) إذا كانت : د (س) = ٤ س + ب وكانت : د (٢) = ١٠ فأوجد : قيمة ب

٣ (أ) إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ = $\frac{ب}{٢}$» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى. هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

(ب) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

٤ (أ) إذا كان : ٢ أ = ٣ ب = ٣ حـ فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{٦ أ + ب + حـ}{٤ أ + ٦ ب + ٦ حـ}$

(ب) احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم : ٥٥ ، ٥٣ ، ٥٧ ، ٥٦ ، ٥٤

٥ (أ) إذا كانت : ص ∝ س وكانت : ص = ٦ عندما س = ٣

فأوجد : [١] العلاقة بين س ، ص [٢] قيمة ص عندما س = ٤

(ب) مثل بيانيًا منحنى الدالة د : د (س) = ٤ − $س^{٢}$ حيث س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى ، معادلة محور التماثل.



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : ن (س) = ٥ ، ن (س × ص) = ١٠ فإن : ن (ص) = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١



٢ إذا كانت: $س = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ، $ص = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ فإن: $(س + ص)^2 =$ ....

(أ) ١٢ (ب) $2\sqrt{3}$ (جـ) $2\sqrt{2}$ (د) صفر

٣ الوسط الحسابي للقيم: ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥ يساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٧ (جـ) ٣٥ (د) ٥

٤ لأى مجموعة ص يكون: $\varnothing$ .... ص

(أ) $\in$ (ب) $\notin$ (جـ) $\subset$ (د) $\not\subset$

٥ العلاقة التي تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص ، س هي ....

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{س}{3} = \frac{4}{ص}$ (د) $\frac{س}{5} = \frac{ص}{2}$

٦ $2^{100} = 2^{99} +$ ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) 2^{99} (د) ٩٩

٢ (أ) إذا كانت: د(س) = ٣ س حيث د: ح ← ح

اذكر درجة د ثم أوجد د(−٢) ، د($\sqrt{3}$)

(ب) إذا كانت: ٥ أ = ٣ ب أوجد قيمة: $\frac{7أ + 9ب}{4أ + 2ب}$

٣ (أ) إذا كانت: س = {−١ ، ١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني أن «ب = ٢ أ + ٤».

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وهل ع دالة؟ ولماذا؟

(ب) إذا كان: $س^4 ص^2 - 14 س^2 ص + 49 = 0$ **فأثبت أن:** $ص \propto \frac{1}{س^2}$

٤ (أ) إذا كان: (س − ٢ ، ٣) = (٥ ، ص + ١) **أوجد:** قيمة كل من س ، ص

(ب) التوزيع التكراري التالي يبين عدد أطفال بعض الأسر في إحدى المدن الجديدة:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الأطفال.

٥ (أ) إذا كانت: أ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل **فأثبت أن:** $\frac{أ}{ب + د} = \frac{جـ^3}{جـ^2 د + د^3}$

(ب) مثل بيانيًا الدالة د حيث د(س) = $س^2 + 2س + 1$ متخذًا س ∈ [−٤ ، ٢]

ومن الرسم استنتج:

١ إحداثيي رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل.

٣ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.



٤ محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ $\sqrt[3]{س^6} = \sqrt{\text{........}}$

(أ) $س^3$ (ب) $س^2$ (جـ) س (د) $س^4$

٢ إذا كان: (س + ٥ ، ٨) = (١ ، ٦ ص + س) فإن: ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) ١٢

٣ مجموعة حل المعادلة: $س^2 + 4 = 0$ في ح هي ....

(أ) {٤} (ب) {٢ ، −٢} (جـ) {−٢} (د) $\varnothing$

٤ إذا كان: س ص = ٧ فإن: ص $\propto$ ....

(أ) $\frac{1}{س}$ (ب) س − ٧ (جـ) س (د) س + ٧

٥ إذا كان: $س^2 - ص^2 = 16$ ، س + ص = ٨ فإن: س − ص = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ١٢٨ (د) ٦٤

٦ إذا كان: مجـ $(س - \bar{س})^2 = 36$ لمجموعة من القيم عددها يساوى ٩

فإن: $\sigma =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٨ (د) ٢٧



٢ (أ) مثل بيانيًا الدالة د حيث د $(س) = (س - ٢)^٢$ ، $س \in [٠ ، ٤]$

ومن الرسم استنتج:

١ معادلة محور التماثل.

٢ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

(ب) إذا كانت: $ص \propto \frac{١}{س}$ ، وكانت: $س = ٢\frac{٤}{٥}$ عندما $ص = \frac{٤}{٧}$

أوجد قيمة ص عندما $س = ٣\frac{١}{٥}$

---

٣ (أ) إذا كانت: $س = \{٢ ، ٣ ، ٥\}$ ، $ص = \{٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠\}$

وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «٢ أ = ب»

لكل $أ \in س$ ، $ب \in ص$

١ اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي.

٢ هل العلاقة دالة؟

(ب) إذا كانت: أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة فأثبت أن: $\sqrt[٣]{\frac{٥أ^٣ - ٣حـ^٣}{٥ب^٣ - ٣ء^٣}} = \frac{أ + حـ}{ب + ء}$

---

٤ (أ) إذا كانت: $س = \{٢ ، ٤\}$ ، $ص = \{٤ ، ٠\}$ ، $ع = \{٤ ، ٥ ، -٢\}$

أوجد: ١ $(ع - ص) \times (س \cap ص)$ ٢ $ن(س^٢)$

(ب) إذا كانت: د $(س) = ٤ س + ب$ وكانت: د $(٣) = ١٥$ فأوجد: قيمة ب

---

٥ (أ) إذا كان: $\frac{أ}{٢س + ص} = \frac{ب}{٣ص - س} = \frac{حـ}{٤س + ٥ص}$

فأثبت أن: $\frac{أ + ٢ب}{٧} = \frac{٤ب + حـ}{١٧}$

(ب) أوجد الانحراف المعياري للتوزيع التكراري التالي:

س	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
ك	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩	١٠٠



أجب عن الأسئلة الآتية: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان الوسط الحسابي للكميات ٢ س ، ٣ ، ٤ ، ٥ يساوى ٤ فإن: س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢ إذا كان: $س \times ص = \{(١ ، ٢) ، (٣ ، ٤)\}$ فإن: $س \cap ص = $ ....

(أ) $\{١ ، ٢\}$ (ب) $\{(٣ ، ٤)\}$ (جـ) $\varnothing$ (د) $\{١ ، ٤\}$

٣ إذا كانت: ص = م س حيث م ثابت $\neq$ صفر فأى العبارات الآتية تكون عبارة خطأ؟

(أ) $ص \propto س$ (ب) $س \propto ص$ (جـ) $س = \frac{١}{م} ص$ (د) $س \propto \frac{١}{ص}$

٤ إذا كانت: أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة فإن: $\frac{أء - ب حـ}{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٥ إذا كانت د: د $(س) = (٢أ - ٢) س^٣ + ٢س^٢ + س + ٢$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية فإن: أ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ١

٦ إذا كانت النقطة (أ − ٥ ، ٥ − أ) تقع فى الربع الرابع فإن ....

(أ) $أ \geq ٥$ (ب) $أ \leq ٥$ (جـ) $أ > ٥$ (د) $أ < ٥$

---

٢ (أ) إذا كانت: $س = \{١ ، ٢ ، ٣\}$ ، $ص = \{٣ ، ٤\}$ أوجد:

١ س − ص ٢ $(ص \cap س) \times ص$ ٣ $ن(ص^٢)$

(ب) إذا كانت: أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل

أثبت أن: $\frac{ب + ء}{حـ^٢ ء + ء^٢} = \frac{أ}{حـ^٢}$

٣ (أ) إذا كانت: $س = \{\frac{1}{2}، ١، صفر، -\frac{1}{2}، -١\}$، $ص = \{١، ٢، صفر، -١، -٢\}$ وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى، وبين هل ع دالة أم لا، ولماذا؟

(ب) إذا كانت: ص تتغير عكسيًا مع $س^2$ حيث ص = ٩ عندما $س = \frac{2}{3}$

أوجد: [١] العلاقة بين ص، س   [٢] قيمة ص عند $س = \frac{1}{3}$

٤ (أ) مثل بيانيًا منحنى الدالة د: $د(س) = (س - ٣)^2 + ١$ متخذًا س ∈ [٠، ٦]

ومن الرسم أوجد:

[١] إحداثيى نقطة رأس المنحنى.   [٢] القيمة الصغرى للدالة.

[٣] معادلة محور التماثل للمنحنى.

(ب) إذا كان: $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٥}$ أوجد قيمة: $\frac{س ص + ص ع}{س^2 + ص^2}$

٥ (أ) احسب الانحراف المعيارى للقيم: ١٢، ١٣، ١٦، ١٨، ١٨، ٢١

(ب) إذا كانت $د(س) = أ س + ب$ وكانت: د(أ) = ب

فأوجد قيمة المقدار: $أ ب^2 + ٥$

٦ محافظة المنوفية

أجب عن الأسئلة الآتية: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

[١] العدد ٣ ينتمى إلى مجموعة حل المتباينة: ....

(أ) $٣ < س$ (ب) $٣ > س$ (جـ) $-٣ \leq -س$ (د) $٣ \leq -س$

[٢] $(\frac{-٣}{٤})^{صفر}$ .... $(\frac{-٣}{٤})^2$

(أ) >   (ب) <   (جـ) =   (د) ≥

[٣] العدد الذى يقع بين: ٠,٠٢، ٠,٠٣ هو ....

(أ) ٠,٠٠٠٢٥   (ب) ٠,٠٠٢٥   (جـ) ٠,٠٢٥   (د) ٠,٢٥

[٤] إذا كانت: أ > ٥ فإن النقطة (٢، أ − ٥) تقع فى الربع ....

(أ) الأول.   (ب) الثانى.   (جـ) الثالث.   (د) الرابع.

[٥] إذا كانت: $\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥}$ فإن: ٥ أ − ٣ ب + ٤ = ...

(أ) ٣   (ب) ٤   (جـ) ٥   (د) ٦

[٦] إذا كان: $مج(س - \bar{س})^2 = ٤٨$ لمجموعة من القيم عددها ١٢

فإن: σ = ...

(أ) ٢   (ب) −٢   (جـ) −٤   (د) ٤

٢ (أ) إذا كانت: $س = \{-١، ١، ٢\}$، $ص = \{٢، ٤، ٦، ٨\}$ وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «ب = ٢ أ + ٤» لكل أ ∈ س، ب ∈ ص

[١] اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى.

[٢] بين أن ع دالة وأوجد مداها.

(ب) إذا كان المستقيم الممثل للدالة د: ح ← ح حيث د(س) = ٦ س − أ يقطع محور الصادات فى النقطة (ب، ٣) فأوجد: قيمة ٢ أ − ٥ ب

٣ (أ) إذا كانت: $س = \{١\}$، $ص = \{٢، ٣\}$، $ع = \{٣، ٤، ٥\}$

أوجد ما يلى: [١] س × ص   [٢] س × (ص − ع)

[٣] $ن(ع^2)$

(ب) إذا كانت: ب وسطًا متناسبًا بين أ، جـ فأثبت أن: $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2} = \frac{ب^2 + جـ^2}{جـ^2}$

٤ (أ) إذا كانت أ : ب : جـ = ٢ : ٣ : ٥ وكانت: أ + ب + جـ = ٣٥

فأوجد: قيمة كل من أ، ب، جـ

(ب) إذا كانت: ص = أ + ٧ وكانت: $أ \propto \frac{1}{س^2}$ وكانت: أ = ٣ عندما س = ٢ فأوجد:

[١] العلاقة بين س، ص   [٢] قيمة ص عندما $س = \sqrt{٣}$



٥ (أ) ارسم منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{2} − ٤ س متخذاً س ∈ [−١ ، ٥]

ومن الرسم أوجد :

١ إحداثيي نقطة رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل.

٣ القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

(ب) أوجد الانحراف المعيارى للقيم الآتية : ٢٠ ، ٢٧ ، ٥ ، ١٦ ، ٣٢



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الدوال الآتية هى دوال كثيرات حدود ما عدا الدالة د حيث د (س) = ...

(أ) س + ٣ (ب) $\sqrt{2}$ س + ١

(ج) س $\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)$ (د) س^{2} (س + ٤)

٢ مجموعة حل المعادلة : (س − ٥)$^{\text{صفر}}$ = ١ فى ح هى ....

(أ) {٥} (ب) {٥ ، −٥} (ج) ح (د) ح − {٥}

٣ إذا كان : (أ − ٧ ، ٢٦) = (−٣ ، ب^{3} − ١) فإن : $\sqrt{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (ج) ± ٥ (د) ± ٧

٤ الثانى المتناسب للأعداد : ٢ ، ... ، ٨ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ± ٤ (د) ± ٦

٥ المدى لمجموعة القيم : ٧ ، ٢ ، ٦ ، ٩ ، ٥ هو ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٢

٦ إذا كانت : ص ∝ س وكانت : ص = ٢ عندما س = ٨

فإن : ص = ٣ عندما س = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٦

٢ (أ) إذا كانت : س = {−٢ ، −٣ ، ٢} ، ص = {$\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{27}$ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «أ^{3} = ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى. هل ع دالة أم لا ؟ مع ذكر السبب.

(ب) إذا كانت : س^{4} ص^{2} − ١٤ س^{2} ص + ٤٩ = ٠ فأثبت أن : ص ∝ $\frac{1}{\text{س}^{2}}$

٣ (أ) إذا كانت : أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة أثبت أن : $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}+\text{د}}{\text{د}}$

(ب) مثل بيانياً منحنى الدالة د : د (س) = ٢ − س^{2} متخذاً س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج معادلة محور التماثل ، القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

٤ (أ) إذا كان : س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)} أوجد : ص^{2}

ومثلها بمخطط بيانى.

(ب) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٥ : ١١

فإنها تصبح ٣ : ٥

٥ (أ) إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٦ س − ل

يقطع محور الصادات فى النقطة (م ، ٣) فأوجد : قيمتى م ، ل

(ب) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات الآتية : ٢٣ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٥

(مقرباً الانحراف المعيارى لأقرب رقم عشرى)

٨ محافظة الدقهلية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : ٥ س = ٩ ص فإن : $\frac{\text{٣ س}}{\text{٢ ص}}$ = ...

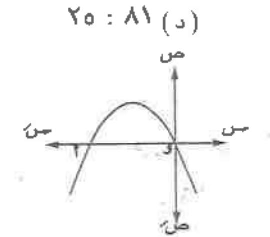
(أ) ٢٧ : ١٠ (ب) ٩ : ٥ (ج) ٥ : ٩ (د) ٨١ : ٢٥

٢ الشكل المقابل منحنى لدالة تربيعية حيث أ (−٤ ، ٠)

فإن معادلة محور التماثل هى : س = ...

(أ) ١ (ب) −١

(ج) −٢ (د) صفر



٣ العدد الذى إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١ ، ٢ ، ٦ فإنها تصبح متناسبة هو ......

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٢

(ب) إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ أثبت أن : $\frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ب^{٢}}{جـ^{٢}} = \frac{٢أ}{جـ}$

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : د (س + ٣) = س − ٣ فإن : د (٧) = ...

(أ) ٤ (ب) ١ (جـ) ٧ (د) ١٠

٢ إذا كانت : مجـ $(س - \overline{س})^{٢}$ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها ٩

فإن الانحراف المعيارى يساوى ......

(أ) ٢ (ب) ١٨ (جـ) ٢٧ (د) ٤

٣ إذا كانت د (س) = ٣ فإن : د (٢) − د (٧) = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) صفر (د) −٤

(ب) إذا كانت س = {٤ ، ٥ ، ٧} وكانت ع دالة على س

وكان بيان : ع = {(أ ، ٥) ، (ب ، ٥) ، (٤ ، ٧)}

أوجد : ١ القيمة العددية للمقدار ٣أ + ٢ب   ٢ مدى الدالة.

٣ (أ) إذا كان : $\frac{أ}{٤س + ص} = \frac{ب}{س - ٤ص}$ أثبت أن : $\frac{أ + ب}{٥س - ٣ص} = \frac{أ - ب}{٣س + ٥ص}$

(ب) احسب الانحراف المعيارى للقيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

٤ (أ) الشكل المقابل لمنحنى الدالة التربيعية

د : د (س) = $س^{٢}$ − (ك − ٢) س − ك + ٤

فإذا كان الشكل و أ ب جـ مربعًا

فأوجد : قيمة الثابت ك

(ب) إذا كانت : ص = ١ + ب حيث ب تتغير عكسيًا

مع مربع س وكانت : س = ١ عندما ص = ٥

أوجد العلاقة بين : س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢

٥ (أ) إذا كانت : د (س) = أ + $س^{٢}$ ، ل (س) = جـ كثيرتى حدود حيث أ ، جـ ثابتان

وكان : ٣ د (٢) + ٣ ل (س) = ٦ أوجد القيمة العددية للمقدار : ٢ د (٠) + ٢ ل (٧)

(ب) إذا كانت : س = {٣ ، ٥ ، ٧} ، ص = {س : س ∈ ط ، ٨ < س < ٣٠} وكانت

الدالة د من س ← ص بيانها كالتالى د = {(٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥) ، (٧ ، ٢١)}

١ اذكر مجال الدالة د   ٢ اكتب قاعدة الدالة.



٩ محافظة الإسماعيلية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ توقع أى نتيجة لمباراة النادى الإسماعيلى يسمى فى علم الرياضيات ......

(أ) احتمالات. (ب) معادلات. (جـ) متباينات. (د) علاقات.

٢ الثالث المتناسب للأعداد : ٢ ، ٣ ، ٦ هو ......

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ يكون العدد $\frac{٢س}{س - ٥}$ نسبيًا إذا كانت : س ≠ ......

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ٥

٤ إذا كانت النقطة (ب − ٤ ، ٢ − ب) تقع فى الربع الثالث فإن : ب = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

٥ إذا كان : ١٧ س + ٨ = ١١ فإن : ١٧ س + ١١ = ...

(أ) ٨ (ب) ١١ (جـ) ١٤ (د) ١٧

٦ إذا تساوت مجموعة من القيم فإن التشتت لتلك القيم ......

(أ) < صفر (ب) > صفر (جـ) = ١ (د) = صفر

٢ (أ) إذا كانت : س = {٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

أوجد : ١ س × ص   ٢ $س^{٢}$ ٣ ن($ص^{٢}$)

(ب) إذا كانت : ٣أ = ٤ب أوجد قيمة المقدار : $\frac{٢أ + ب}{٥أ - ٣ب}$

٣ (أ) إذا كان أ تتغير عكسيًا مع مربع ب ، وكانت : أ = ٥ عندما ب = ٣

أوجد : قيمة أ عندما ب = ٢

(ب) إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٣ س − أ

يقطع محور الصادات فى النقطة (ب ، ٥) أوجد : قيمتى أ ، ب

٤ (أ) إذا أضيف ضعف العدد س إلى كل من الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ أصبحت كميات متناسبة

فأوجد : قيمة س

(ب) إذا كانت : س = {−١ ، ١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «ب = ٢ أ + ٤» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

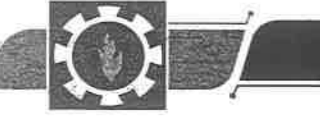
١ أوجد بيان ع ومثلها بمخطط سهمى. ٢ هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

٥ (أ) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = ٢ − س^{٢} حيث س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج : ١ إحداثيى رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل.

٣ القيمة الصغرى أو العظمى للدالة.

(ب) احسب الانحراف المعيارى للقيم الآتية : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١



١٠ محافظة السويس

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : ٢ ، ٣ ، ٦ ، س كميات متناسبة فإن : س = ...

(أ) ٩ (ب) ١٨ (ج) ١٢ (د) ٣

٢ إذا كانت : ٣ أ × ك = ١٢ أ^{٢} فإن : ك = ...

(أ) ٤ أ^{٢} (ب) ٣ أ (ج) ٤ أ (د) ٣ أ^{٢}

٣ إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤} فإن : (٣ ، ٤) ∈ ....

(أ) س × ص (ب) ص × س (ج) س^{٢} (د) ص^{٢}

٤ إذا كان : (أ ، ٥) = (٦ ، ب) فإن : أ + ب = ...

(أ) ٥ (ب) ١١ (ج) ٦ (د) ١

٥ $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه القيم}}$ = ...

(أ) المدى (ب) الانحراف المعيارى

(ج) الوسط الحسابى (د) المنوال

٦ إذا كانت النقطة (٢ ، ص) تقع على محور السينات فإن : ص + ٤ = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٣

٢ (أ) إذا كانت : ٤ أ = ٣ ب أوجد : قيمة $\frac{٤ أ + ب}{٢ أ - ب}$

(ب) إذا كانت : س = {٠ ، ٢ ، ٤} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «أ + ب = ٥» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ اكتب بيان العلاقة. ٢ مثل ع بمخطط سهمى. ٣ هل ع دالة ؟

٣ (أ) إذا كان : س × ص = {(٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩)}

أوجد : ١ س ، ص ٢ ص × س

(ب) مثل بيانيًا منحنى الدالة د : د (س) = ١ + س^{٢} حيث س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

١ نقطة رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل. ٣ القيمة الصغرى.

٤ (أ) إذا كانت : س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة فأثبت أن : $\frac{س^{٢} + ٢ ع^{٢}}{ص^{٢} + ٢ ل^{٢}} = \frac{س ع}{ص ل}$

(ب) من بيانات الجدول المقابل أجب عن الأسئلة الآتية :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

١ بين نوع التغير بين ص ، س

٢ أوجد ثابت التغير.

٣ أوجد قيمة ص عندما س = ٣

٥ (أ) إذا كانت د (س) = س^{٢} − ٣ س ، ر (س) = س − ٣

١ أوجد : د (٢) + ر (٢) ٢ أثبت أن : د (٣) + ر (٣) = صفر

(ب) احسب الانحراف المعيارى للقيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١



 ١١ محافظة بورسعيد

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : (٣ ، ٥) ∈ {٣ ، ٦} × {س ، ٨} فإن : س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) ٣

٢ الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة : ص = ٢ س − ١ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) ($\frac{١}{٢}$ ، ٠) (ب) (٠ ، −١) (جـ) (−١ ، ٠) (د) (٠ ، $\frac{١}{٢}$)

٣ الفرق بين أكبر المفردات وأصغرها لمجموعة من المفردات يسمى ....

(أ) الانحراف المعيارى. (ب) الوسط الحسابى.

(جـ) الوسيط. (د) المدى.

٤ إذا كانت النقطة (س − ٤ ، ٢ − س) حيث س ∈ ص تقع فى الربع الرابع فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

٥ أى من الجداول الآتية يمثل تغيرًا طرديًا بين س ، ص ؟

(أ)

س	ص
٢	٩
٤	١٨

(ب)

س	ص
٣	٢٠
٥	١٢

(جـ)

س	ص
٣	٦
−٢	−٩

(د)

س	ص
١٠	٩
٥	١٨

٦ إذا كان : (س − ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فإن : $\sqrt{\text{س} + ٢\,\text{ص}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ± ٥ (جـ) $\sqrt{١٧}$ (د) ٢٥

٢ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٥} ، ع = {٤ ، ٥}

فأوجد : ١ ن(س × ع) ٢ (س − ص) ∩ ع

(ب) مثل بيانيًا د : د(س) = س^{٢} + ٢ س + ١ متخذًا س ∈ [−٤ ، ٢]

ومن الرسم استنتج :

١ إحداثيى رأس المنحنى. ٢ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

٣ (أ) إذا كانت : د(س) = ٤ س + ب وكانت : د(٣) = ١٥ **أوجد : قيمة ب**

(ب) إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ وكانت : ص = ٦ عندما س = ٢,٥

فأوجد : ١ العلاقة بين س ، ص ٢ قيمة ص عندما س = ٥

٤ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١٢ ، ٢١ ، ٤٧ ، ٥٢} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «أ رقم من أرقام العدد ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ اكتب بيان ع ومثلها بالمخطط السهمى.

٢ **أى من العلاقات التالية صواب مع ذكر السبب :** ١ ع ٥٢ ، ٢ ع ٢١ ، ٣ ع ٤٧ ؟

(ب) إذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{١}{\text{ص}}$ فى تناسب متسلسل **فأوجد : قيمة** س^{٤} ص^{٢}

٥ (أ) إذا كان : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ فأثبت أن : $\frac{٢\,\text{ص} - \text{ع}}{٣\,\text{س} - ٢\,\text{ص} + \text{ع}} = \frac{١}{٢}$

(ب) **احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للقيم الآتية : ٣ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ١٥**

١٢ محافظة دمياط

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\sqrt{٣٦}$ = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ± ٦ (د) ١٨

٢ النقطة (−٢ ، ٥) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.



٣ أكثر مقاييس التشتت انتشارًا وأدقها هو ....

(أ) الوسيط. (ب) الوسط الحسابي.

(جـ) المدى. (د) الانحراف المعياري.

٤ ح = ...

(أ) $\text{ن} \cap \bar{\text{ن}}$ (ب) $\text{ح}_{+} \cap \text{ح}_{-}$ (جـ) $\text{ح}_{+} \cup \text{ح}_{-}$ (د) $\text{ن} \cup \bar{\text{ن}}$

٥ إذا كان : $(\text{س} - ٣ ، ٢^{\text{ص}}) = (٢ ، ٣٢)$ فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (٥ ، ٢) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٥) (د) (٢ ، ٢)

٦ إذا كان : س ص = ٨ فإن : ص ∝ ....

(أ) س − ٨ (ب) $\frac{١}{\text{س}}$ (جـ) س (د) س + ٨

---

٢ (أ) إذا كانت : س = {٢ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢} ، ع = {٣}

أوجد : ١ ىر (س × ص) ٢ (س − ص) × ع ٣ $\text{ص}^{٢}$

(ب) إذا كانت : ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ أثبت أن : $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}}$

---

٣ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني أن «أ + ب = ٧»

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ اكتب بيان ع

٢ اذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة من س إلى ص أم لا ، وإذا كانت دالة أوجد مداها.

(ب) إذا كان : $\frac{٢١\text{س} - \text{ص}}{٧\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}}$ أثبت أن : ص ∝ ع

---

٤ (أ) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم الآتية : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

(ب) إذا كانت ص ∝ س ، وكانت : ص = ٦ عندما س = ٣

أوجد : ١ العلاقة بين س ، ص ٢ قيمة ص عندما س = ٥

٥ (أ) إذا كان : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$ أثبت أن : $\sqrt{٣\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} = ٢\text{س} + \text{ص}$

(ب) مثل بيانيًا الدالة د : $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣$ متخذًا س ∈ [−٢ ، ٢]

ومن الرسم استنتج : ١ معادلة محور التماثل للدالة. ٢ القيمة الصغرى للدالة.

١٣ محافظة كفر الشيخ

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الثالث المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ... ، ٤٨ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٣٦

٢ ∅ .... {١ ، ٢}

(أ) ∈ (ب) ∉ (جـ) ⊄ (د) ⊂

٣ المدى لمجموعة القيم : ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوي ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ١٢

(ب) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢}$ متخذًا س ∈ [−١ ، ٥]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى للدالة ومعادلة محور التماثل والقيمة الصغرى للدالة.

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})(\sqrt{٧} - \sqrt{٥}) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٣٥ (د) −٢

٢ |−٥| + |٥| = ...

(أ) صفر (ب) ٢٥ (جـ) ١٠ (د) −١٠

٣ إذا كان : (س − ٢ ، ٣) = (٥ ، س + ص) فإن : س − ص = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) −١١ (د) ١١

(ب) إذا كانت : ص وسطًا متناسبًا بين س ، ع

أثبت أن : $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} - \text{ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{ص} + \text{ع}}$



٣ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

، وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني أن «ب = ٦ − أ»

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

[١] اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي. [٢] بين أن ع دالة واذكر مداها.

(ب) إذا كانت : ٣ س = ٢ ص أوجد قيمة النسبة : $\frac{\text{٣ س + ٢ ص}}{\text{٦ ص − س}}$

٤ (أ) إذا كانت : س = {٢ ، −١} ، ص = {٤ ، ٠} ، ع = {٤ ، ٥ ، −٢}

أوجد : [١] س × ص [٢] (ص ∩ ع) × س [٣] ن(ص^{2})

(ب) إذا كانت : د (س) = ٢ س + أ وكانت : د (٢) = ١ أوجد : قيمة أ

٥ (أ) إذا كانت : ص تتغير عكسيًا مع س^{2} وكانت : ص = ٢ عندما س = ٤

[١] أوجد العلاقة بين ص ، س [٢] استنتج قيمة ص عندما س = ١٦

(ب) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم : ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

١٤ محافظة البحيرة

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] مجموعة الحل في ح للمعادلة : س^{2} + ٩ = ٠ هي ....

(أ) {−٣} (ب) {٣} (ج) {−٣ ، ٣} (د) ∅

[٢] إذا كانت النقطة (ك − ٤ ، ٢ − ك) حيث ك ∈ ص تقع في الربع الثالث

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

[٣] المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

(أ) $-\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ (ب) ٦$\sqrt{٣}$ (ج) ٢$\sqrt{٣}$ (د) −٢$\sqrt{٣}$

[٤] إذا كانت : ٧ ، س ، $\frac{1}{\text{ص}}$ في تناسب متسلسل فإن : س^{2} ص = ...

(أ) ٧ (ب) $\frac{1}{7}$ (ج) ١٤ (د) ٤٩

[٥] إذا كان : أ + ٣ ب = ٧ ، حـ = ٣

فإن القيمة العددية للمقدار : أ + ٣ (ب + حـ) = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (ج) ٢١ (د) ٣٠

[٦] الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في المجموعة يُسمى ....

(أ) الوسط الحسابي. (ب) الوسيط.

(ج) المدى. (د) الانحراف المعياري.

٢ (أ) إذا كانت : س = {١} ، ص = {٢ ، ٣} ، ع = {٢ ، ٥ ، ٦}

أوجد : [١] س × (ص ∩ ع) [٢] ن(ع^{2})

(ب) أوجد العدد الموجب الذي إذا أضيف مربعه إلى كل من حدي النسبة ٥ : ١١

فإنها تصبح ٣ : ٥

٣ (أ) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة

د : ح ⟵ ح حيث د (س) = ٤ س − ٥ فأوجد : قيمة أ

(ب) إذا كان : $\frac{\text{أ + ب}}{٣} = \frac{\text{ب + حـ}}{٦} = \frac{\text{حـ + أ}}{٥}$ فأثبت أن : $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{أ}}$ = ٧

٤ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٥} ، وكانت ع علاقة على س حيث «أ ع ب»

تعني أن «أ + ب = ٦» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س

[١] اكتب بيان ع [٢] بيّن أن ع دالة ، وأوجد مداها.

(ب) احسب الانحراف المعياري للقيم الآتية : ١٧ ، ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ١٨

٥ (أ) إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣

فأوجد : [١] العلاقة بين ص ، س [٢] قيمة ص عندما س = ٥

(ب) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{2} − ٣ متخذًا س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

[١] معادلة محور التماثل. [٢] القيمة الصغرى للدالة.



١٥ محافظة الفيوم

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يسمى ....

(أ) الوسيط. (ب) المنوال.
(جـ) المدى. (د) الانحراف المعياري.

٢ إذا كانت : د (٣ س) = ٦ فإن : د (-٢) = ...

(أ) -١٢ (ب) -٣ (جـ) ٦ (د) -١٨

٣ [-٥ ، ٣] -]-٥ ، ٣[= ....

(أ) {-٥ ، ٣} (ب)]-٥ ، ٣] (جـ) [-٥ ، ٣[(د) ∅

٤ خمس العدد $٥^{١٠}$ يساوي ....

(أ) $٥^{٢}$ (ب) $٥^{٩}$ (جـ) ٥% (د) [illegible]

٥ إذا كانت : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٥}$ فإن كل نسبة تساوي ....

(أ) $\frac{أ + ب + جـ}{٣}$ (ب) $\frac{أ + ٢ب - جـ}{٣}$
(جـ) $\frac{أ - ب + جـ}{١٠}$ (د) $\frac{أ - ب}{٥}$

٦ إذا كان : س عددًا فرديًا فإن العدد الفردي التالي له هو ....

(أ) س - ١ (ب) س + ١ (جـ) س + ٢ (د) س + ٣

٢ (أ) إذا كان : ٣ أ = ٢ ب فأوجد قيمة المقدار : $\frac{٣أ - ب}{أ + ٢ب}$

(ب) إذا كانت : د (س) = أ س + ٥ ، وكانت : د (-٣) = ٨ فأوجد : قيمة أ

٣ (أ) إذا كانت : س ، ص ، ع في تناسب متسلسل فأثبت أن : $\frac{س^{٢} + ص^{٢}}{ص^{٢} + ع^{٢}} = \frac{س}{ع}$

(ب) إذا كانت : س = {-١ ، ١ ، ٢} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني أن «ب = ٢ أ + ٤» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي. هل ع دالة من س إلى ص؟ ولماذا ؟

٤ (أ) إذا كانت ص تتغير طرديًا بتغير س ، وكانت : ص = ٢٠ عندما س = ٧ ، أوجد العلاقة بين ص ، س ، ثم أوجد ص عندما س = ١٤

(ب) إذا كان (٥ - ٢ س ، $ص^{٣}$) = (١ ، ٢٧) فأوجد : قيمة $\sqrt{٣ س + ص}$

٥ (أ) ارسم الشكل البياني للدالة د : د (س) = $س^{٢}$ - ٢ حيث س ∈ [-٣ ، ٣] ، ومن الرسم استنتج إحداثيي نقطة رأس المنحنى ، والقيمة الصغرى للدالة.

(ب) أوجد الانحراف المعياري للقيم : ٧ ، ١٦ ، ١٣ ، ٥ ، ٩

١٦ محافظة بني سويف

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ النقطة (-٤ ، -٢) تقع في الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

٢ إذا كانت : س تمثل عددًا سالبًا فإن العدد الموجب هو ....

(أ) ٢ س (ب) ٣ $س^{٢}$ (جـ) ٤ $س^{٣}$ (د) ٦ $س^{٥}$

٣ إذا كانت : س ص = ١ فإن : ص تتغير مع ....

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) س - ١ (جـ) س (د) س + ١

٤ أبسط وأسهل طرق قياس التشتت هو ....

(أ) الوسيط. (ب) الوسط.
(جـ) الانحراف المعياري. (د) المدى.

٥ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ك$ حيث ك ∈ ح* فإن : $\frac{أ جـ هـ}{ب د و}$ = ...

(أ) $ك^{٣}$ (ب) $ك^{٢}$ (جـ) ك (د) ٣



[٦] إذا كان : ٣ س = ٢ ص فإن : $\frac{٢ س}{٣ ص}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٩}$

[٢] (أ) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

(ب) إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٩}
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «ب = أ^{٢}»
لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وبين هل ع دالة أم لا.

[٣] (أ) إذا كانت : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٤} = \frac{٣ س - ٢ ص + ٥ ع}{٥ ك}$ أوجد : قيمة ك العددية.

(ب) مثل بيانيًا الدالة د : د(س) = ٢ − ٢ س^{٢} ، س ∈ [−٢ ، ٢] ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة العظمى للدالة.

[٤] (أ) إذا كانت : ص تتغير طرديًا مع س وكانت : ص = ٣ عندما س = ١٥
أوجد العلاقة بين : ص ، س ثم أوجد قيمة : س عندما ص = ١٠٠

(ب) إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}
أوجد : [١] س × ص [٢] ص × س [٣] س^{٢}

[٥] (أ) إذا كانت : د(س) = ٣ س + ك ، ر(س) = ك
حيث د ، ر دالتان كثيرتا حدود. أوجد قيمة ك إذا كانت : د(٣) + ر(٥) = ١٥

(ب) احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

١٧ محافظة المنيا

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{٥} + \sqrt{٢٠}$ = ...

(أ) $\sqrt{٢٥}$ (ب) ٥ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٩ $\sqrt{٥}$ (د) ٣ $\sqrt{٥}$

[٢] إذا كانت ثلاثة أمثال عدد = ٤٥ فإن : $\frac{١}{٥}$ العدد = ...

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٩

[٣] ٥^{٢} × ٥$^{-٢}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −٥

[٤] إذا كان : ن(س) = ٣ ، ن(س × ص) = ١٢ فإن : ن(ص) = ...

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٥ (د) ٣٦

[٥] العلاقة التى تمثل تغيرًا طرديًا بين المتغيرين ص ، س هى ......

(أ) س ص = ٥ (ب) ص = س + ٣ (جـ) $\frac{س}{٣} = \frac{٥}{ص}$ (د) $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}$

[٦] المدى هو ...... مقاييس التشتت.

(أ) أبسط. (ب) أكبر. (جـ) أصعب. (د) غير ذلك.

[٢] (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن « العدد أ معكوس ضربى للعدد ب»
لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى
، ثم بين هل ع دالة أم لا.

(ب) إذا كانت : ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ أثبت أن : $\frac{أ + ب}{أ - جـ} = \frac{ب}{ب - جـ}$

[٣] (أ) إذا كانت : ٢ ص = ٣ س فأوجد قيمة : $\frac{٣ س + ٢ ص}{٦ ص - س}$

(ب) إذا كانت : س = {٣ ، ٤} ، ص = {٤ ، ٥} ، ع = {٦ ، ٥}
فأوجد : [١] س × (ص ∩ ع) [٢] (س − ص) × ع

[٤] (أ) إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت : ص = ٣ عندما س = ٢
أوجد : [١] العلاقة بين س ، ص [٢] قيمة س عندما ص = ٤

(ب) احسب الانحراف المعيارى للقيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

[٥] (أ) اذكر درجة الدالة د : د(س) = ٣ − ٢ س^{٢} ثم أوجد : د(٠) ، د(−٢)

(ب) مثل بيانيًا الدالة د : د(س) = س^{٢} + ٢ س + ١ متخذًا س ∈ [−٤ ، ٢]
ومن الرسم استنتج :
[١] معادلة محور التماثل. [٢] القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.



١٨ محافظة أسيوط

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $س^{٥} ÷ س^{٢}$ = ... (حيث س ≠ ٠)

(أ) $س^{٧}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $س^{١٠}$ (د) $س^{٥}$

٢ إذا كانت : س = {١} ، ص = {٣} فإن : ن(س × ص) = ...

(أ) {(١ ، ٣)} (ب) {(٣ ، ١)} (جـ) ٣ (د) ١

٣ المعكوس الضربي للعدد ٠,٢٥ هو ....

(أ) ٤ (ب) −٠,٢٥ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) −٠,٥

٤ الوسط المتناسب بين ٤ ، ١٦ هو ....

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) ±٨ (د) ٦٤

٥ ٠,١٢ + ٠,٣ = ...

(أ) ٠,٤٢ (ب) ٠,١٥ (جـ) ٠,٢٤ (د) ٠,٣٦

٦ المدى لمجموعة القيم : ٤ ، ١٤ ، ٢٥ ، ٣٤ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٨ (د) ٣٤

٢ (أ) إذا كانت : س = {٦ ، ٧} ، ص = {٣ ، ٧} فأوجد :

١ (س ∩ ص) × س ٢ ن($ص^{٢}$)

(ب) إذا كانت : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤}$ فأثبت أن : $\frac{٣جـ - ب}{أ + ب} = \frac{٩}{٥}$

٣ (أ) إذا كانت : س = {−١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٤ ، ٦ ، ٩} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «$أ^{٢}$ = ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبيّن أن ع دالة من س إلى ص وأوجد مداها.

(ب) إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عندما س = ٤

أوجد : ١ العلاقة بين ص ، س ٢ قيمة ص عندما س = $\frac{٣}{٤}$

٤ (أ) أوجد العدد الموجب الذي إذا أُضيف مربعه إلى حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

(ب) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^{٢}$ − ٤ متخذًا س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة ومعادلة محور التماثل.

٥ (أ) إذا كانت : د(س) = $س^{٢}$ − ٢ ، ر(س) = ٣

أوجد : د($\sqrt{٢}$) + ر(٥)

(ب) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم : ١١ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٧ ، ٢٠

١٩ محافظة سوهاج

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أربعة أمثال العدد $٢^{٨}$ هو ....

(أ) $٢^{٣٢}$ (ب) $٨^{٨}$ (جـ) $٢^{١٠}$ (د) $٤^{١٢}$

٢ إذا كان : ن(س) = ٢ ، ن($ص^{٢}$) = ٩ فإن : ن(س × ص) = ...

(أ) ٦ (ب) ١٨ (جـ) ١١ (د) ٧

٣ إذا كان : $\sqrt[٣]{س - ١}$ = ٢ (حيث س ∈ ح) فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٣$\sqrt[٣]{٣}$ (جـ) −٣ (د) $\sqrt[٣]{٣}$

٤ إذا كانت : ٨ ، ٦ ، س ، ١٢ كميات متناسبة فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٥ (د) ٢٥

٥ إذا كان الوسيط للقيم : أ + ٣ ، أ + ٢ ، أ + ٤ (حيث أ ∈ $ص_{+}$) هو ٨

فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٤

٦ من مقاييس التشتت ....

(أ) الوسيط. (ب) المنوال. (جـ) المدى. (د) الوسط الحسابي.

٢ (أ) إذا كان : س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)}

أوجد : ١ س ، ص ٢ ص × س

(ب) إذا كانت : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$: أوجد قيمة : $\frac{٣ س + ٢ ص}{٦ ص - س}$

٣ (أ) إذا كانت : س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «أ + ب = ٥»

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي.

٢ بين أن ع دالة من س إلى ص وأوجد مداها.

(ب) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

٤ (أ) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم : ص = ٤ س − ٥ فأوجد : قيمة أ

(ب) إذا كانت : ص ∝ س وكانت : ص = ٦ عندما س = ٣

فأوجد : ١ العلاقة بين س ، ص ٢ قيمة ص عندما س = ٥

٥ (أ) مثل بيانيًا الدالة د : د(س) = $س^{٢}$ − ٤ س + ٤ متخذًا س ∈ [−١ ، ٥]

ومن الرسم استنتج : ١ إحداثيي رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل.

(ب) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم الآتية : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١




٢٠ محافظة قنا

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : س ص = ٥ فإن : ص ∝ ....

(أ) $س^{-١}$ (ب) س (ج) ٥ س (د) $س^{٥}$

٢ √٣ + √٣ + √٣ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٣ √٣ (د) ٢٧

٣ الوسط المتناسب بين العددين ٣ ، ١٢ هو ....

(أ) ٦ (ب) −٦ (ج) ±٦ (د) ٩

٤ النقطة (−٢ ، ٣) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.

٥ جميع الدوال المعرفة بالقواعد الآتية كثيرات حدود عدا الدالة ....

(أ) $د_{١}$(س) = $س^{٣}$ + $س^{٢}$ + ٣ (ب) $د_{٢}$(س) = $س^{٢}$ + $\frac{١}{س}$ + ٧

(ج) $د_{٣}$(س) = ٥ − $س^{٢}$ (د) $د_{٤}$(س) = $س^{٢}$ $(س - ٣)^{٢}$

٦ المدى لمجموعة القيم : ٥١ ، ٢٤ ، ٤٣ ، ٥٥ ، ٢٨ هو ....

(أ) ٥٥ (ب) ٢٤ (ج) ٢١ (د) ٣١

٢ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «أ + ب = ٧»

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي.

هل ع دالة أم لا مع ذكر السبب ؟ وإذا كانت دالة فأوجد المدى.

(ب) إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين : أ ، ح فأثبت أن : $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + ح^{٢}} = \frac{أ}{ح}$

٣ (أ) إذا كانت : د(س) = $س^{٢}$ − ٣ س ، ر(س) = س − ٣

١ أوجد : د(√٢) + ٣ ر(√٢) ٢ أثبت أن : د(٣) = ر(٣)

(ب) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

٤ (أ) إذا كان : ٥ أ = ٣ ب فأوجد قيمة المقدار : $\frac{٧ أ + ٩ ب}{٤ أ + ٢ ب}$

(ب) فيما يلي التوزيع التكراري لأعمار ١٠ أطفال :

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

احسب الانحراف المعياري للعمر بالسنوات.

٥ (أ) إذا كانت ص ∝ س وكانت : ص = ٤٠ عندما س = ١٤

فأوجد : س عندما ص = ٨٠

(ب) مثل بيانيًا الدالة د : د (س) = ٢ س^{٢} − ٣ ، خذ س ∈ [−٢ ، ٢]

ومن الرسم البيانى أوجد :

١ رأس المنحنى. ٢ معادلة خط التماثل.

٣ القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.



٢١ محافظة الأقصر

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموع عوامل العدد ١٥ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٥ (د) ٢٤

٢ إذا كانت د (س) = ٤ س + أ وكانت : د (٢) = ١٥ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٥

٣ المقدار الأصغر عندما س = ٧ هو ....

(أ) $\frac{٦}{س}$ (ب) $\frac{٦}{س + ١}$ (جـ) $\frac{٦}{س − ١}$ (د) $\frac{س}{٦}$

٤ الثالث المتناسب للعددين −٦ ، ١٢ هو ....

(أ) −٢٤ (ب) ٦ (جـ) ١٨ (د) ٧٢

٥ إذا كان : ٣ س − ١ = ١ − ٣ س فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) −١ (د) ٣

٦ أى من القيم الآتية للعدد س تجعل مدى مجموعة القيم : س ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٤ يساوى ١٤ ؟

(أ) ٣٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٩ (د) ١٠

٢ (أ) إذا كان بيان الدالة د = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٩) ، (٥ ، ١١)}

اكتب : ١ مجال الدالة د ٢ مدى الدالة د ٣ قاعدة الدالة د

(ب) عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٣ إذا طرح من كل منهما ٧ أصبحت النسبة ١ : ٢ فأوجد العددين.

٣ (أ) إذا كانت : س = {−٢ ، ٢ ، ٥} ، ص = {٣ ، ٧ ، ل}

وكانت ع دالة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى «ب = أ^{٢} − ١»

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ أوجد قيمة ل ٢ اكتب بيان ع

٣ مثل الدالة ع بمخطط سهمى.

(ب) إذا كانت : ص = أ − ٩ وكانت ص ∝ $\frac{١}{س^{٢}}$ وكانت أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

أوجد العلاقة بين س ، ص ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

٤ (أ) الشكل المقابل يمثل الدالة د

حيث د (س) = ٤ − ٢ س

أوجد إحداثيى كل من النقطتين أ ، ب

ومساحة Δ أ و ب

(ب) إذا كانت : $\frac{س}{٧}$ = $\frac{ص}{٣}$

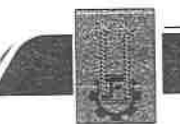
أثبت أن : (٢ س − ٣ ص) ، (س + ٢ ص) ، ١٠ ، ٢٦ متناسبة.

٥ (أ) احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم : ٧٢ ، ٥٣ ، ٦١ ، ٧٠ ، ٥٩

(ب) مثل بيانيًا الدالة د حيث د (س) = ١ − ٤ س + س^{٢} متخذًا س ∈ [٠ ، ٤]

ومن الرسم أوجد : ١ إحداثيى رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل.

٣ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.



٢٢ محافظة أسوان

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : س = {١ ، ٢} ، ص = {٠}

فإن : ن (س × ص) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣



[٢] $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) =$ ....

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

[٣] المدى لمجموعة القيم : ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٧ ، ٢٠ هو ....

(أ) ٢٧ (ب) ٢٠ (جـ) ١٦ (د) ١٣

[٤] الثالث المتناسب للأعداد ٨ ، ٦ ، ... ، ١٢ هو ....

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٦ (د) ٨

[٥] إذا كانت : س = ٣ ، ص = ٥ فإن : $\text{ص}^{\text{س}}$ = ...

(أ) ١٣٥ (ب) ١٢٥ (جـ) ١١٥ (د) ٩٥

[٦] إذا كانت : ٥ س = ١٢ فإن : ١٠ س = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٤

[٢] (أ) إذا كان : س × ص = {(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧)}

أوجد : [١] ص [٢] ص × س

(ب) إذا كانت : ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ فأثبت أن : $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} - \text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب} + \text{جـ}}$

[٣] (أ) إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠}

وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعنى أن «٢ أ = ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

[١] اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي. [٢] هل العلاقة تمثل دالة ؟

(ب) إذا كانت ص تتغير عكسيًا مع س وكانت : ص = ٢ عندما س = ٤

أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد ص عندما س = ١٦

[٤] (أ) إذا كانت : (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ⟵ ح

حيث د (س) = ٤ س − ٥ أوجد : قيمة أ

(ب) إذا كانت : $\frac{\text{أ}}{2} = \frac{\text{ب}}{3} = \frac{\text{جـ}}{4} = \frac{2\text{أ} - \text{ب} + 5\text{جـ}}{3\text{س}}$ أوجد : قيمة س

[٥] (أ) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = $(\text{س} - 3)^2$ متخذًا س ∈ [٠ ، ٦]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة الصغرى أو العظمى للدالة ومعادلة محور التماثل.

(ب) التوزيع التكراري التالي يبين عدد أطفال بعض الأسر في إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الأطفال.





٢٣ محافظة الوادي الجديد

أجب عن الأسئلة الآتية :

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : $\sqrt[3]{\text{س}} = \sqrt{16}$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

[٢] إذا كانت : ٢ ، س ، ٤ ، ٦ متناسبة فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٨

[٣] إذا كانت : ص = ٢ س فإن : ص ∝ ....

(أ) $\frac{1}{\text{س}}$ (ب) س (جـ) س + ٢ (د) س − ٢

[٤] $3^{\text{س} - 5} = 1$ عندما س ∈ ....

(أ) ٥ (ب) ح − {٥} (جـ) ح (د) {٥}

[٥] الوسط المتناسب بين العددين ٣ ، $\frac{1}{3}$ هو ....

(أ) ± ١ (ب) ٩ (جـ) $\frac{1}{9}$ (د) ± ٩

[٦] إذا كان : مجـ $(\text{س} - \overline{\text{س}})^2$ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها ٩ فإن الانحراف المعياري = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

[٢] (أ) إذا كانت : س = {٢ ، ٣} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥}

فأوجد : [١] س × ص ومثله بمخطط سهمي. [٢] ن (س × ص)

(ب) إذا كانت : $\text{س}^2 \text{ص}^2$ − ١٤ س ص + ٤٩ = ٠ فأثبت أن : ص ∝ $\frac{1}{\text{س}}$

٣ (أ) أوجد العدد السالب الذى إذا أضيف مربعه إلى كل من حدى النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٤ : ٥

(ب) إذا كانت س = {٢ ، ٤ ، ٨} وكانت : ع علاقة على س حيث «أ ع ب» تعنى «أ ضعف ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ س ، اكتب بيان ع وهل ع دالة ؟ ولماذا ؟

٤ (أ) إذا كانت : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٤} = \frac{٢أ - ٥ب + ٣جـ}{س}$

فأوجد قيمة كل من : [١] س [٢] $\frac{أ + ب + جـ}{ب}$

(ب) إذا كانت د : ح ← ح ، د (س) = ٢ س − ٣

فأوجد : قيمة ك إذا كان : [١] د (ك) = ٥ [٢] (٢ ، ك) ∈ بيان الدالة د

٥ (أ) التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال لبعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال س	٣	٥	٧	٩	١١
عدد الأسر ك	٣	١٢	٢١	١٠	٤

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال.

(ب) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = $(س + ١)^٢$ متخذًا س ∈ [−٣ ، ١]

ومن الرسم استنتج :

[١] نقطة رأس المنحنى. [٢] معادلة محور التماثل.

[٣] القيمة الصغرى للدالة.

٢٤ محافظة جنوب سيناء

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الدالة د : د (س) = $س^٤ - ٢ س^٢ + ٥$ كثيرة حدود من الدرجة ....

(أ) الرابعة. (ب) الثالثة. (جـ) الثانية. (د) الأولى.

[٢] الرابع المتناسب للكميات : ٣ ، ٦ ، ٦ هو ....

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ١

[٣] إذا كان : ن(س) = ٥ ، ن(س × ص) = ١٥ فإن : ن(ص) = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٣ (د) ٢

[٤] الوسط الحسابى للقيم : ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧ يساوى ....

(أ) ٤٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ٥

[٥] إذا كانت : $ص^٢ + ٤ س^٢ = ٤ س ص$ فإن : ....

(أ) ص ∝ س (ب) ص ∝ $س^٢$ (جـ) ص ∝ $\frac{١}{س}$ (د) ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$

[٦] إذا كانت : ف عددًا فرديًا فإن العدد الفردى التالى له هو ....

(أ) $ف^٢$ (ب) $ف^٢ + ف$ (جـ) ف + ٦ (د) ف + ٢

٢ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {ص : ص ∈ ط ، ٢ ≤ ص < ٩}

حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب»

تعنى «أ = $\frac{١}{٢}$ ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ، وهل ع دالة من س إلى ص ؟ وأوجد مداها.

٣ (أ) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١ أصبحت ٢ : ٣

(ب) إذا كانت ص ∝ س ، وكانت : ص = ١٤ عندما س = ٤٢

أوجد علاقة بين س ، ص ، ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٦٠

٤ (أ) مثل بيانيًا الدالة د : ح ← ح حيث د (س) = ٢ س − ٣

(ب) إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، جـ فأثبت أن : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$

٥ (أ) إذا كان : $(س^٣ ، ص + ١) = (٢٧ ، \sqrt[٣]{١٢٥})$ فأوجد : قيمة كل من س ، ص

(ب) احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للبيانات الآتية : ٢٠ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ١٨



٢٥ محافظة شمال سيناء

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : د (س) = ٥ فإن : د (٥) + د (−٥) = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) ١٠

٢ إذا كان : (س − ٢ ، ٣) = (٥ ، ٣) فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٨

٣ إذا كانت : ف عددًا فرديًا فإن العدد الفردى التالى له هو ....

(أ) $ف^{٢}$ (ب) ف + ٦ (جـ) ف + ٢ (د) $ف^{٢}$ + ١

٤ الرابع المتناسب للكميات ٤ ، ٨ ، ٨ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

٥ مجموع الجذرين التربيعين للعدد ٢ $\frac{١}{٤}$ هو ....

(أ) ١ $\frac{١}{٢}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٢}$

٦ الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

(أ) المدى. (ب) الوسط الحسابى.

(جـ) الوسيط. (د) الانحراف المعيارى.

٢ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$}

وكانت ع علاقة معرفة من س إلى ص حيث «أ ع ب»

تعنى أن «أ هو المعكوس الضربى للعدد ب» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى. هل ع دالة أم لا ؟

(ب) إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت : ص = ٣ عندما س = ٢

١ أوجد العلاقة بين س ، ص ٢ أوجد قيمة ص عندما س = ١,٥

٣ (أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٥ س + ٤ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب) فأوجد : قيمة ب

(ب) إذا كانت : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٤}$ فأوجد قيمة المقدار : $\frac{٣ س + ص}{س + ٥ ص}$

٤ (أ) إذا كان : س × ص = {(١ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٢)}

فأوجد كلًا من : س ، ص ، $ص^{٢}$

(ب) إذا كانت : ب وسطًا متناسبًا بين أ ، حـ أثبت أن : $\frac{٥ حـ^{٢} - ٢ ب^{٢}}{٥ ب^{٢} - ٢ أ^{٢}} = \frac{حـ}{أ}$

٥ (أ) احسب الانحراف المعيارى لمجموعة القيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

(ب) مثل بيانيًا د : د (س) = ٢ − $س^{٢}$ متخذًا س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

١ إحداثيى رأس المنحنى. ٢ معادلة محور التماثل.

٣ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.



٢٦ محافظة البحر الأحمر

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت النقطة (أ − ٣ ، ٥) تقع على محور الصادات فإن : أ = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) صفر

٢ إذا كانت : ٢ ، ٣ ، ٦ ، س كميات متناسبة فإن : س = ...

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ١٢ (د) ٣

٣ المدى لمجموعة القيم : ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٢

٤ إذا كانت : د (س) = ٣ فإن : د (٥) + د (−٥) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٦



٥ إذا كانت : س − ص = ٥ ، س + ص = ١

فإن : $س^{٢} − ص^{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢٥}$ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) ٢٥

٦ إذا كان : س ص = ٧ فإن : ص ∝ ....

(أ) $\frac{١}{س}$ (ب) س − ٧ (جـ) س + ٧ (د) س

٢ (أ) إذا كان : س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٥) ، (١ ، ٧)} أوجد :

١ س ٢ ν(ص) ٣ ص × س

(ب) إذا كانت ب وسطًا متناسبًا بين أ ، حـ أثبت أن : $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + حـ^{٢}} = \frac{أ}{حـ}$

٣ (أ) إذا كانت د(س) = ٤ س + أ ، د(٢) = ١٥ أوجد : قيمة أ

(ب) إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ، ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني «أ + ب = ٥» لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

١ اكتب بيان ع ومثلها بمخطط بياني. ٢ هل ع دالة أم لا ؟

٤ (أ) إذا كانت : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة : $\frac{٣ س + ٢ ص}{٦ ص − س}$

(ب) إذا كانت ص ∝ س وكانت : ص = ٢ عندما س = ٦ أوجد :

١ العلاقة بين ص ، س ٢ قيمة ص عندما س = ١٥

٥ (أ) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ − $س^{٢}$ متخذًا س ∈ [−٣ ، ٣]

ومن الرسم استنتج :

١ إحداثيي نقطة رأس المنحنى. ٢ معادلة خط تماثل المنحنى.

(ب) احسب الانحراف المعياري للقيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢٦



٢٧ محافظة مطروح

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٢ [١ ، ٤] −]١ ، ٤[= ....

(أ) {٠} (ب) {١ ، ٤} (جـ)]١ ، ٤] (د) ∅

٣ إذا كان : (٢ ، ٥) ∈ {٣ ، ٢} × {١ ، س} فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٥

٤ إذا كان : (س − ١ ، $٢^{ص}$) = (١ ، ٨) فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٢) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (٠ ، −٣)

٥ النقطة (٣ ، −٤) تقع في الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

٦ إذا كان : مجـ$(س − \overline{س})^{٢}$ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوي ٩

فإن : σ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

٢ (أ) إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢}

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث «أ ع ب» تعني أن «أ = $\frac{١}{٣}$ ب»

لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ، هل ع دالة أم لا ؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

(ب) إذا كانت : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ أوجد قيمة : $\frac{٧ أ − ٢ ب}{٣ أ + ٢ ب}$

٣ (أ) إذا كان : س × ص = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥)}

أوجد : ١ س ، ص ٢ $ص^{٢}$



(ب) إذا كانت : $\frac{\text{س}}{\text{٢أ + ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢ب − جـ}} = \frac{\text{ع}}{\text{٢جـ − أ}}$

أثبت أن : $\frac{\text{٢س + ص}}{\text{٤أ + ٤ب − جـ}} = \frac{\text{٢س + ٢ص + ع}}{\text{٣أ + ٦ب}}$

٤ (أ) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ح ⟵ ح

حيث د (س) = ٤ س − ٥ أوجد : قيمة أ

(ب) التوزيع التكرارى التالى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال	٠	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

احسب الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لعدد الأطفال.

٥ (أ) إذا كانت : ص تتغير عكسيًا مع س وكانت : ص = ١٠ عندما س = ٣

أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

(ب) مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = $(\text{س} - ٣)^2$ متخذًا س ∈ [٠ ، ٦]

ومن الرسم استنتج نقطة رأس المنحنى والقيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

١ محافظة القاهرة

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن : ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) -٢

[٢] عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

[٣] طا ٦٠° طا ٣٠° = ...

(أ) جا ٣٠° (ب) طا ٣٠° (جـ) طا ٤٥° (د) جتا ٦٠°

[٤] مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى يساوى ....

(أ) ٥٤٠° (ب) ٣٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

[٥] معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٢ (ب) س = ٣ (جـ) ص = ٢ (د) ص = ٣

[٦] محيط المربع الذى مساحة سطحه ١٠٠ سم^{٢} يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ (د) ٥٠

٢ (أ) إذا كانت : س جا ٤٥° جتا ٤٥° = جا ٣٠° **أوجد :** قيمة س (موضحًا خطوات الحل)

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٠)

٣ (أ) س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص حيث س ص = ٦ سم ، ص ع = ٨ سم

أوجد قيمة المقدار : جتا س جتا ع - جا س جا ع

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى حيث أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٠)

، حـ (-٧ ، ٥) ، ء (-٢ ، ٩) أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء مربع.

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

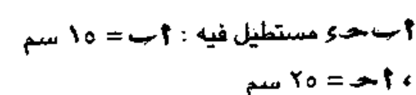
أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٥ سم

، أ حـ = ٢٥ سم

أوجد : [١] طول $\overline{ب حـ}$

[٢] ق(∠ أ حـ ب)

[٣] مساحة المستطيل أ ب حـ ء



(ب) إذا كانت : حـ (٦ ، -٤) هى نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٥ ، -٣)

أوجد إحداثيى نقطة ب

٥ (أ) إذا كان المستقيم الذى معادلته : أ س + ٢ ص - ٧ = ٠ يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. **أوجد : قيمة أ**

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٢) ، (-٢ ، -١) ثم أثبت أن المستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ محافظة الجيزة



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن : جا ٢ س = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

[٢] بُعد النقطة (٤ ، ٣) عن المحور الصادى يساوى .... وحدة طول.

(أ) -٣ (ب) -٤ (جـ) ٣ (د) ٤

[٣] النقط : (٨ ، ٠) ، (٠ ، ٦) ، (٠ ، ٠) ....

(أ) تكون مثلثًا قائم الزاوية. (ب) تكون مثلثًا منفرج الزاوية.

(جـ) تكون مثلثًا حاد الزوايا. (د) تقع على استقامة واحدة.



٤ إذا كانت : أ (٥ ، ٧) ، ب (١ ، −١) فإن نقطة منتصف أب هى ....

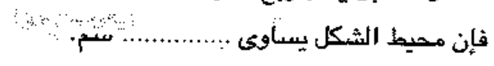
(أ) (٢ ، ٣)   (ب) (٣ ، ٣)   (جـ) (٣ ، ٢)   (د) (٣ ، ٤)

٥ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ، −٣) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٣   (ب) ص = ١   (جـ) ص = −٣   (د) س = −٣

٦ الشكل المقابل يمثل ربع دائرة طول نصف قطرها ٢ سم

فإن محيط الشكل يساوى .... سم.



٢سم

(أ) ٢ π   (ب) ٥ π

(جـ) π + ٤   (د) ٤ π + ٤

٢ (أ) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويمر بالنقطة (١ ، −١)

(ب) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ فيه : أ جـ = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم

أوجد : ١ جتا أ جتا ب − جا أ جا ب   ٢ ق (∠ب)

٣ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

(ب) إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° أوجد : قيمة ك إذا كان : ل١ ⊥ ل٢

٤ (أ) إذا كانت : جتا هـ ظا ٣٠° = جتا² ٤٥° فأوجد : ق (∠هـ) حيث هـ زاوية حادة.

(ب) بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط : أ (٣ ، ٣) ، ب (١ ، ٥) ، جـ (١ ، ٣) من حيث أطوال أضلاعه.

٥ (أ) أوجد ميل المستقيم : ٥ س + ٤ ص + ١٠ = ٠ .

ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

(ب) أثبت أن النقط : أ (٣ ، −١) ، ب (−٤ ، ٦) ، جـ (٢ ، −٢) الواقعة فى مستوى إحداثى متعامد تمر بها دائرة واحدة مركزها م (−١ ، ٢)

ثم أوجد مساحة الدائرة.



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أب // جـ د وكان ميل أب = ٢/٣ فإن : ميل جـ د = ...

(أ) ٣/٢   (ب) ٢/٣   (جـ) −٣/٢   (د) −٢/٣

٢ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين قائم الزاوية فى أ

فإن : ظا جـ = ...

(أ) √٣ / ٢   (ب) ١ / √٣   (جـ) ١   (د) ١/٢

٣ لأى زاويتين حادتين أ ، ب إذا كان : ق (∠أ) + ق (∠ب) = ٩٠°

، ق (∠أ) ≠ ق (∠ب) فإن : ....

(أ) جا أ = جتا ب   (ب) جا أ = جا ب   (جـ) ظا أ = ظا ب   (د) جتا أ = جتا ب

٤ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى ٢ وحدة طول

فإن النقطة .... تنتمي إليها.

(أ) (١ ، −٢)   (ب) (−٢ ، √٥)   (جـ) (٠ ، ١)   (د) (√٣ ، ١)

٥ إذا كان : ق (∠س) = ق (∠ص) ، حيث ∠س ، ∠ص متكاملتان

فإن : ق (∠س) = ...°

(أ) ٣٠   (ب) ٤٥   (جـ) ٦٠   (د) ٩٠

٦ متوازى الأضلاع الذى قطراه متساويان فى الطول ومتعامدان يكون ....

(أ) مربعًا.   (ب) معينًا.   (جـ) مستطيلًا.   (د) شبه منحرف.

٢ (أ) أوجد قيمة س التى تحقق : س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جا² ٦٠°

(ب) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٥) ، جـ (٠ ، −٣)

أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه ثم أوجد إحداثيي نقطة د

٣ (أ) أثبت أن النقط : أ (٣ ، −١) ، ب (−٤ ، ٦) ، ح (٢ ، −٢) تقع على دائرة مركزها النقطة م (−١ ، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة (علمًا بأن π = ٣,١٤)

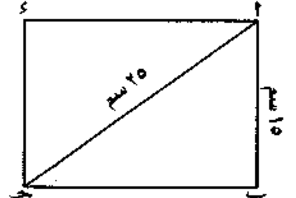
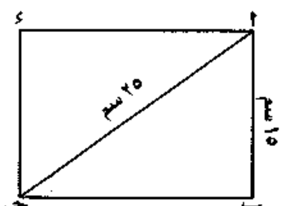
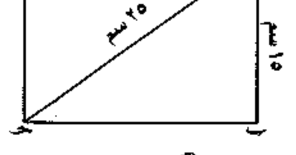
(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على المستقيم : س + ٢ ص + ٥ = ٠ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات.

٤ (أ) أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (−٣ ، −٢) ، (٤ ، ٥) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

(ب) أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ح فيه : أ ح = ٦ سم ، ب ح = ٨ سم
أوجد قيمة : جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

٥ (أ) إذا كانت : أ (٤ ، −٦) ، ب (٣ ، ٧) ، ح (١ ، −٣)
فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة أ ، وبنقطة منتصف $\overline{\text{ب ح}}$

(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ١٥ سم
، أ ح = ٢٥ سم
أوجد : [١] ق (∠ أ ح ب)
[٢] مساحة سطح المستطيل أ ب ح ء

٤ محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ قياس زاوية حادة موجبة
فإن : س = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٩٠ (ج) ٦٠ (د) ١٢٠

[٢] مثلث مساحته ٢٤ سم^2 وارتفاعه ٨ سم
فإن طول قاعدته المناظرة لهذا الارتفاع = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ٦ (ج) ٣ (د) ٢

[٣] إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{ح ء}}$ يوازى محور الصادات حيث ح (ك ، ٤) ، ء (−٥ ، ٧)
فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (ج) −٥ (د) ٤

[٤] معادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = ١ هى ....

(أ) ص = س (ب) ص = −س (ج) ص = ٢ س (د) ص = ٠

[٥] إذا كانت النقطة (٠ ، أ) تنتمى للمستقيم : ٣ س − ٤ ص + ١٢ = ٠
فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) −٣ (ج) ٣ (د) −٤

[٦] فى Δ أ ب ح إذا كان : (أ ب)^2 > (ب ح)^2 + (أ ح)^2 فإن زاوية ح تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (ج) منفرجة. (د) مستقيمة.

٢ (أ) إذا كان بُعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوى ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول
فأوجد : قيمة س

(ب) بدون استخدام الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :
جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° − جتا^2 ٣٠°

٣ (أ) أ ب ح ء متوازى أضلاع فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٥) ، ح (٠ ، −٣)
أوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه ، ثم أوجد إحداثيى نقطة ء

(ب) أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ح = ١٠ سم ، ب ح = ٨ سم
فأثبت أن : جا^2 أ + ١ = ٢ جتا^2 ح + جتا^2 أ

٤ (أ) إذا كان المستقيم ل$_1$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) ، المستقيم ل$_2$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فأوجد : قيمة ك إذا كان : ل$_1$ // ل$_2$

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وعمودى على المستقيم :
س + ٣ ص + ٧ = ٠



٥ (أ) في الشكل المقابل :

أ ب جـ د مستطيل فيه :

أ ب = ١٥ سم ، أ جـ = ٢٥ سم

أوجد : ١ ق(∠ أ جـ ب)

٢ مساحة سطح المستطيل أ ب جـ د

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ وحدة طول على الترتيب.

٥ محافظة الشرقية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : جا (س + ٢٥°) = $\frac{1}{2}$ حيث س قياس زاوية حادة

فإن : س = ...°

(أ) ٢٠ (ب) ٣٥ (جـ) صفر (د) ٥

٢ الخط المستقيم الذي معادلته : ٣ ص = ٢ س − ٦ ميله يساوي ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) ٦ (د) $\frac{2}{3}$

٣ معادلة الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ويميل على الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية قياسها ٦٠° هي ....

(أ) س = $\sqrt{3}$ ص (ب) ص = $\sqrt{3}$ س + ٢

(جـ) ص = ٣ س (د) ص = $\sqrt{3}$ س

٤ إذا كان : أ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية في ب ، وكانت : جا أ = $\frac{2}{7}$

فإن : جتا جـ = ...

(أ) $\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{3}{7}$ (جـ) $\frac{4}{7}$ (د) $\frac{5}{7}$

٥ بُعد النقطة أ ($\sqrt{2}$ ، ٤) عن نقطة الأصل يساوي .... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) ٢$\sqrt{2}$ (جـ) ٣$\sqrt{2}$ (د) ٤$\sqrt{2}$

٦ إذا كان المستقيم $ل_1$ ميله $\frac{أ}{5}$ والمستقيم $ل_2$ ميله $\frac{-ب}{3}$ حيث أ ، ب ≠ ٠ وكان $ل_1$ ⊥ $ل_2$

فإن : أ ب = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{-3}{5}$ (جـ) ١٥ (د) −١٥

٢ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\frac{جا ٣٠° جا ٦٠°}{جا ٤٥° جتا ٤٥°}$ = جتا ٣٠°

(ب) أثبت أن النقط : أ (٣ ، −١) ، ب (−٤ ، ٦) ، جـ (٢ ، −٢) الواقعة في مستوى إحداثي متعامد تمر بها دائرة واحدة مركزها النقطة م (−١ ، ٢)

ثم أوجد محيط الدائرة.

٣ (أ) إذا كانت : أ (٥ ، ١) ، ب (٣ ، −٧) ، جـ (١ ، ٣) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة أ ويوازي $\overleftrightarrow{ب جـ}$

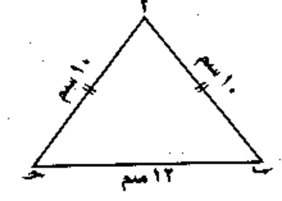
(ب) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوي الساقين حيث :

أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم

أوجد : ١ جا ب

٢ مساحة سطح المثلث أ ب جـ



٤ (أ) إذا كان : أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٢ ، −٢) ، جـ (٥ ، −١)

فأوجد : ١ إحداثيي نقطة تقاطع القطرين. ٢ إحداثيي نقطة د

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٥) ، (٠ ، ٣)

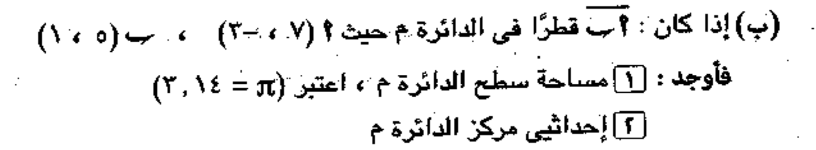
ثم أوجد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات.

٥ (أ) إذا كانت : جتا س = جا ٣٠° جتا ٦٠°

فأوجد : قياس زاوية س (حيث س زاوية حادة) ثم أوجد : ظا س

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات وعمودي على المستقيم : $\frac{س}{2} + \frac{ص}{3} = 1$





٦ محافظة المنوفية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : جتا (س + ١٥)° = $\frac{١}{٢}$ فإن : جا (٧٥ − س)° = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) ١

٢ دائرة مرسومة داخل مربع بحيث تمس أضلاعه الأربعة ، فإذا كان محيط المربع ٥٦ سم فإن مساحة سطح الدائرة .... سم^{٢} (حيث $\pi \approx \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) $\frac{٧٧}{٢}$ (ب) ٧٧ (جـ) ١١٢ (د) ١٥٤

٣ مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلة ١٤٤°
فإن عدد أضلاعه .... أضلاع.

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

٤ المثلث المتساوى الساقين يمكن أن تكون أطوال أضلاعه ٤ سم ، ٩ سم ، .... سم

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٣ (د) ٣٦

٥ النقطة (−٢ ، −٣) تبعد عن محور السينات .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −٣

٦ المستقيم الذى ميله $\frac{١}{٢}$ ويقطع محور الصادات عند النقطة (صفر ، ٣)
فإن معادلته هى ....

(أ) ٢ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٦ (ب) ص = $\frac{١}{٢}$ س
(جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ (د) ٢ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

٢ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية للمقدار :

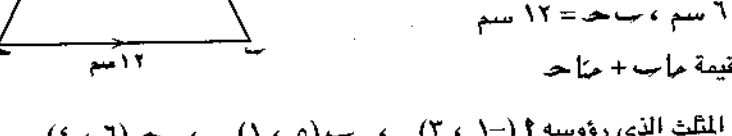
جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° − ظا^{٢} ٤٥°

(ب) إذا كان : $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م حيث أ (٧ ، −٣) ، ب (٥ ، ١)
فأوجد : ١ مساحة سطح الدائرة م ، اعتبر (π = ٣,١٤)
٢ إحداثيى مركز الدائرة م

٣ (أ) إذا كان المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٣ سم
فأوجد القيمة العددية للمقدار : جا حـ جتا ب + جتا حـ جا ب

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٣) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٠) ، (٢ ، ١)

٤ (أ) فى الشكل المقابل :

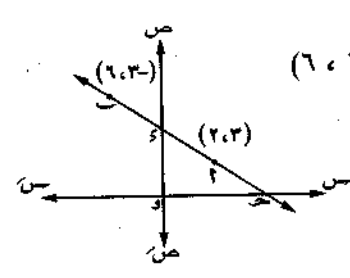


أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين ،
مساحته = ٣٦ سم^{٢} ، $\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$
، أ ء = ٦ سم ، ب حـ = ١٢ سم
أوجد : قيمة جا ب + جتا حـ

(ب) بين نوع المثلث الذى رؤوسه أ (−١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) بالنسبة لقياسات زواياه.

٥ (أ) أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم الذى معادلته :
٤ س + ٥ ص − ١٠ = ٠

(ب) فى الشكل المقابل :



المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يمر بالنقطتين أ (٣ ، ٢) ، ب (−٣ ، ٦)
ويقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين حـ ، ء على الترتيب.
أوجد بالبرهان :
١ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$
٢ مساحة المثلث ء و حـ حيث و نقطة الأصل.



٧ محافظة الغربية



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] البعد العمودى بين المستقيمين : ص − ٤ = ٠ ، ص + ٥ = ٠
يساوى .... من وحدات الطول.

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ٤

[٢] معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٢) ويوازى محور السينات هى ....

(أ) س = ٣ (ب) ص = ٢ (جـ) ص = −٢ (د) س + ص = ١

[٣] إذا كان المستقيم الذى معادلته : ص = ك س + ١ يوازى المستقيم الذى معادلته
٢ ص − س = ٠ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) −٢

[٤] إذا كانت الأطوال ٣ ، ٧ ، ل هى أطوال أضلاع مثلث فإن ل يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) ٤ (د) ١٠

[٥] صورة النقطة (−٣ ، ٥) بالانعكاس فى محور الصادات هى ....

(أ) (٣ ، ٥) (ب) (٥ ، ٣) (جـ) (−٥ ، ٣) (د) (−٣ ، −٥)

[٦] إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب فإن : $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا حـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

٢ (أ) إذا كانت : ظا س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠° أوجد : قيمة س (حيث س قياس زاوية حادة).

(ب) إذا كان المثلث س ص ع الذى رؤوسه س (٣ ، ٥) ، ص (٤ ، ٢) ، ع (−٥ ، أ)
قائم الزاوية فى ص فأوجد : [١] قيمة أ [٢] مساحة سطح المثلث س ص ع

٣ (أ) إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين ٣ : ٥
فأوجد القياس الستينى لكل منهما بالدرجات والدقائق.

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٢) عموديًا على المستقيم س + ص = ٥.

٤ (أ) أثبت أن النقط أ (٣ ، −١) ، ب (−٤ ، ٦) ، حـ (٢ ، −٢) تقع على دائرة
واحدة مركزها النقطة م (−١ ، ٢) ، ثم أوجد محيط الدائرة بدلالة π

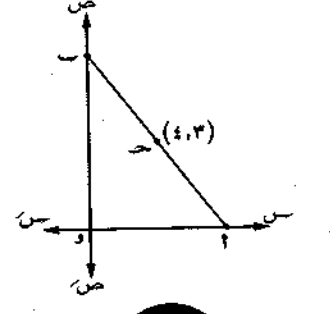
(ب) أ ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ،
أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم

أوجد قيمة : جتا (∠ء حـ ب) − ظا (∠أ حـ ب)

٥ (أ) أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٥) ، حـ (٠ ، −٣)

أوجد : [١] إحداثيى نقطة تقاطع القطرين. [٢] إحداثيى الرأس ء

(ب) فى الشكل المقابل :



النقطة حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث حـ (٣ ، ٤)
، و نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد.

أوجد :

[١] إحداثيى كل من النقطتين أ ، ب

[٢] معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٨ محافظة الدقهلية



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] فى المثلث أ ب حـ : ق(∠أ) = ٨٥° ، جا ب = جتا ب
فإن : ق(∠حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٥٠° (د) ٦٠°

[٢] مساحة المثلث المحدد بالمستقيمات : س = ٠ ، ص = ٠
، ٣ س + ٢ ص = ١٢ هى ....

(أ) ٦ وحدات مربعة. (ب) ١٢ وحدة مربعة.

(جـ) ٤ وحدات مربعة. (د) ٥ وحدات مربعة.



٣ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ص) ، (٣ ، ٤) ميله يساوى ظا ٤٥°
فتكون ص = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) −١ (د) ٤

(ب) أ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه : أء // ب حـ ، أء = ٤ سم ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم أوجد قيمة المقدار : (ظا ب جتا حـ) ÷ (جتا² حـ + جا² ب)

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان المستقيم الذى معادلته : أ س + (٢ − أ) ص = ٥ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٤) ، (٣ ، ٥) فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) ٦ (د) ٤

٢ أ ب حـ مثلث فيه : ٢ ق(∠حـ) = ق(∠أ) + ق(∠ب)
فإن : ق(∠حـ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٩٠

٣ المستقيم : س/٢ − ص/٣ = ٦
يقطع من محور السينات جزءًا طوله .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ١٢

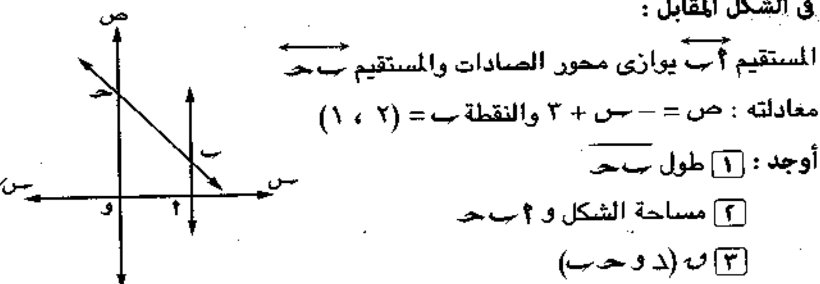
(ب) أ ب قطر في دائرة مركزها م ، حيث ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧)
أوجد : ١ محيط الدائرة. ٢ معادلة المستقيم العمودى على أ ب من نقطة أ

---

٣ (أ) أثبت أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء الذى رؤوسه :
أ (−١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٧ ، ٤) ، ء (١ ، ٦) متوازى أضلاع.

(ب) الشكل المقابل يمثل المستقيم أ ب الذى معادلته : ص = م س + حـ
ويقطع من محورى الإحداثيات جزءين متساويين فى الطول ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)
أوجد : ١ قيمة كل من م ، حـ ٢ مساحة المثلث أ ب و

٤ (أ) فى الشكل المقابل :
المستقيم أ ب يوازى محور الصادات والمستقيم ب حـ
معادلته : ص = −س + ٣ والنقطة ب = (٢ ، ١)
أوجد : ١ طول ب حـ
٢ مساحة الشكل و أ ب حـ
٣ ق(∠و حـ ب)



(ب) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب
١ أثبت أن : جا² أ + جتا² أ = ١
٢ إذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٣ سم أوجد : ق(∠حـ) لأقرب دقيقة.

---

٥ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

(ب) بدون استخدام الحاسبة أثبت أن : ظا² ٦٠° − ظا² ٤٥° = جا² ٦٠° + جتا² ٦٠° + ٢ جا ٣٠°



أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ نقطة منتصف أ ب حيث أ (٦ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤) هى ....

(أ) (٦ ، ٤) (ب) (٤ ، ٦) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (٢ ، ٣)

٣ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما ٣ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يساوى .... سم.

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٤ إذا كانت : ظا ٢ س = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ حيث (٢ س) قياس زاوية حادة

فإن : س = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

٥ عندما تقف أمام المرآة وتظهر صورتك فإن هذا يسمى فى علم الرياضيات ....

(أ) دورانًا. (ب) انتقالًا. (جـ) انعكاسًا.

٦ فى الشكل المقابل :

أى مما يأتى يمثل معادلة المستقيم ل ؟

(أ) ص = س (ب) ص = ٢

(جـ) ص + س = ٢ (د) ص − س = ٢

٢ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س إذا كان : س جتا² ٣٠° = ظا² ٦٠° جتا² ٤٥°

(ب) إذا كانت : أ (٥ ، −١) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ (١ ، −٣)

فأوجد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة منتصف ب جـ ، والنقطة أ

٣ (أ) أثبت أن النقط : أ (١ ، −٢) ، ب (−٤ ، ٢) ، جـ (١ ، ٦)

هى رؤوس مثلث متساوى الساقين.

(ب) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب أوجد قيمة : $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا جـ}}$

وإذا كانت : ظا هـ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا جـ}}$ أوجد : ق (∠ هـ) حيث هـ زاوية حادة.

٤ (أ) إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (أ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° أوجد قيمة أ إذا كان المستقيمان متوازيين.

(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٥ سم

، د ∈ أ ب بحيث أ د = ١ سم ، رسم د هـ ⊥ ب جـ

أوجد : ظا (∠ د جـ هـ)

٥ (أ) إذا كان : أ ب جـ د معينًا فيه : أ (٣ ، ٣) ، جـ (−٣ ، −٣)

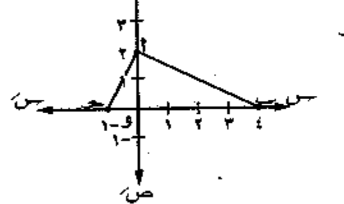
أوجد : ١ نقطة تقاطع القطرين. ٢ معادلة المستقيم ب د

(ب) فى الشكل المقابل :

فى المستوى الإحداثى المتعامد رسم المثلث أ ب جـ

أثبت أن : Δ أ ب جـ قائم الزاوية

وأوجد مساحة سطحه.





١٠ محافظة السويس

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ جا² ٦٠° + جتا² ٦٠° = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) ١

٢ أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ٢٠٠°

فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٨٠° (ب) ٥٠° (جـ) ١٠٠° (د) ١٦٠°

٣ فى الشكل المقابل :

معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = ١ (ب) ص = − س

(جـ) ص = س (د) ص = ١

٤ إذا كان : أ ، ب قياسا زاويتين متتامتين بحيث أ : ب = ١ : ٢

فإن : ب = ...

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°



٥ البعد العمودى بين المستقيمين : س − ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠
يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ٣

٦ إذا كانت : أ(٠ ، ٠) ، ب(٥ ، ٧) ، حـ(٥ ، هـ) رؤوس المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ فإن : هـ = ...

(أ) صفر (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٥

٢ (أ) **بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :** ٢ جا $٣٠^\circ + ٤$ جتا $٦٠^\circ =$ ظا^2 ٦٠°

(ب) إذا كانت : أ(−١ ، −١) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٦ ، ٠) ، ء(٣ ، −٤) أربع نقط فى مستوى إحداثى متعامد أثبت أن : $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ينصف كل منهما الآخر.

٣ (أ) إذا كانت : جتا ٣س = $\frac{جا ٦٠^\circ جا ٣٠^\circ}{ظا ٤٥^\circ جا^2 ٤٥^\circ}$ **فأوجد :** قيمة س بالدرجات حيث ٣س قياس زاوية حادة.

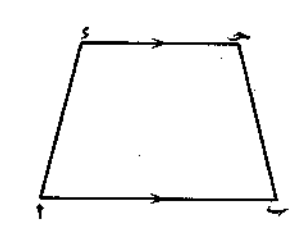
(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وعمودى على الخط المستقيم المار بالنقطتين أ(٢ ، −٣) ، ب(٥ ، −٤)

٤ (أ) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ فيه : أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٤ سم
أثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ميل الخط المستقيم : $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$
ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات.

٥ (أ) أ ب حـ مثلث حيث أ(٠ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، حـ(−٤ ، ٣)
أوجد : محيط المثلث أ ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل :
أ ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$
، أ(٩ ، −٢) ، ب(٣ ، ٢)
، حـ(−س ، −س) ، ء(٤ ، −٣)
أوجد إحداثيى النقطة حـ



١١ محافظة بورسعيد

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٦}$ متعامدين فإن : ك = ...

(أ) ٩ (ب) ٤ (جـ) −٩ (د) −٤

٢ البعد بين النقطتين (١٥ ، ٠) ، (٦ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) −٩ (ب) ٩ (جـ) ٣ (د) −٣

٣ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ فيه : أ ب = ٢٥ سم ، أ حـ = ١٥ سم
فإن مساحة سطح المثلث أ ب حـ = ... سم^2

(أ) ٣٠٠ (ب) ٧٥ (جـ) ١٥٠ (د) ٣٧٥

٤ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يوازى محور الصادات حيث حـ(م ، ٤) ، ء(−٥ ، ٧)
فإن : م = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) −٧ (د) ٧

٥ إذا كانت نقطة الأصل هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٥ ، −٢)
فإن النقطة ب هى ....

(أ) (٢ ، ٥) (ب) (٥ ، −٢) (جـ) (−٢ ، −٥) (د) (−٥ ، ٢)

٦ إذا كانت : ظا (س + ١٠°) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة
فإن : ق(∠س) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٦٠° (د) ٧٠°

٢ (أ) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (−١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)
يوازى المستقيم : ٣ ص − س − ١ = ٠.

(ب) **بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :** جا ٦٠° جتا ٣٠° + جتا ٦٠° جا ٣٠° = ١

٣ (أ) إذا كانت : جتا هـ = $\frac{جتا^2 ٤٥^\circ}{ظا ٣٠^\circ}$ **فأوجد :** ق(∠هـ) حيث هـ زاوية حادة.



(ب) أثبت أن النقط أ (−٣ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (١ ، −٦)
هي رؤوس مثلث متساوي الساقين.

٤ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ميل الخط المستقيم : $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$
ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٣ وحدات.

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعي حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٢) ، حـ (−٢ ، −٢)
، ء (−٢ ، ١) أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

٥ (أ) إذا كانت أ (٥ ، −٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، −٣)
فأوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{ب حـ}$

(ب) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه : س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم
أوجد قيمة : جا س جتا ع + جتا س جا ع

١٢ محافظة دمياط

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية التي قياسها ٤٠° تتمم الزاوية التي قياسها ....
(أ) ٥٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٤٠°

٢ إذا كانت : حـ (٦ ، −٤) هي منتصف $\overline{أ ب}$ حيث أ (٥ ، −٣)
فإن نقطة ب هي ....
(أ) (−٥ ، ٧) (ب) (٥ ، ٧) (جـ) (٧ ، ٥) (د) (٧ ، −٥)

٣ طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة (٣ ، ٤)
يساوي .... وحدة طول.
(أ) ٧ (ب) ١ (جـ) ١٢ (د) ٥

٤ ميل المستقيم : س − ٥ = ٠ هو ....
(أ) ٥ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) غير معرف. (د) صفر

٥ إذا كانت : ظا (س + ١٠°) = ١ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠س) = ...
(أ) ٤٥° (ب) ٣٥° (جـ) ٨٠° (د) ٥٠°

٦ البُعد العمودي بين المستقيمين : س − ٣ = ٠ ، س + ٤ = ٠
يساوي .... وحدة طول.
(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ٧

٢ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : (٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥)

(ب) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٧ سم ، أ حـ = ٢٥ سم
أوجد قيمة : جا² أ + جا² حـ

٣ (أ) إذا كانت النقط : (٠ ، ١) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة
أوجد : قيمة أ

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٧) ويوازي المستقيم الذي معادلته :
س + ٣ ص + ٥ = ٠

٤ (أ) أوجد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة إذا كان :
٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = ٢ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات
مقداره يساوي ٧ وحدات.

٥ (أ) أثبت أن : ظا ٦٠° = $\frac{٢ ظا ٣٠°}{١ - ظا^{٢} ٣٠°}$ مبينًا خطوات الحل.

(ب) بين نوع المثلث الذي رؤوسه النقط : أ (−٢ ، ٤) ، ب (٣ ، −١) ، حـ (٤ ، ٥)
بالنسبة لأطوال أضلاعه.

١٣ محافظة كفر الشيخ

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع يساوي ....
(أ) ٦٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٣٠°



٢ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متعامدين فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) −٩ (جـ) −٤ (د) ٩

٣ إذا كان : أ ب جـ ء مربعًا فإن : ق (∠ جـ أ ب) = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

٤ إذا كانت : جا $\frac{س}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٣}$ قياس زاوية حادة فإن : س = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٠° (د) ٩٠°

٥ متوازي الأضلاع الذى قطراه متساويان في الطول وغير متعامدين يكون ....

(أ) مربعًا (ب) معينًا (جـ) مستطيلًا (د) شبه منحرف

٦ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٢ ، −٣) ويوازي محور السينات هي ....

(أ) س = ٢ (ب) ص = ٣ (جـ) س = −٢ (د) ص = −٣

٢ (أ) بيِّن نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ (٣ ، ٠) ، ب (١ ، ٤) ، جـ (−١ ، ٢) من حيث أطوال أضلاعه.

(ب) أوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة المقدار : جا^{٢} ٤٥° جتا ٦٠° + $\frac{١}{٢}$ ظا ٦٠° جا ٦٠°

٣ (أ) إذا كان المستقيم ل$_{١}$: ص = (٢ − ك) س + ٥ ، والمستقيم ل$_{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° أوجد : قيمة ك إذا كان ل$_{١}$ // ل$_{٢}$

(ب) إذا كان : $\sqrt{٣}$ ظا س = ٤ جا ٦٠° جتا ٣٠° أوجد : ق (∠ س) حيث س زاوية حادة.

٤ (أ) إذا كان بعد النقطة (س ، ٣) عن النقطة (٢ ، ٥) يساوي ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

أوجد : قيم س

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله ٣ ويمر بالنقطة (٥ ، −٢)

٥ (أ) إذا كانت : أ (٢ ، ٣) هي منتصف $\overline{ب جـ}$ حيث جـ (−١ ، ٣).

أوجد : إحداثيي النقطة ب

(ب) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، جا أ + جتا جـ = ١ أوجد : ق (∠ أ)

١٤ محافظة البحيرة

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف $\overline{أ ب}$ حيث أ (٥ ، −٢) فإن النقطة ب هي ....

(أ) (−٥ ، −٢) (ب) (٥ ، ٢) (جـ) (−٥ ، ٢) (د) (٠ ، ٠)

٢ الزاوية التي قياسها ٥٠° تتمم زاوية قياسها ....

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٣٠° (د) ١٣٠°

٣ دائرة مركزها (٣ ، −٤) وطول نصف قطرها ٥ وحدات فأي من النقط الآتية تنتمي للدائرة ؟

(أ) (−٣ ، ٤) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٠ ، ٤)

٤ إذا كانت : جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث $\frac{س}{٢}$ قياس زاوية حادة فإن : س = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

٥ إذا كان أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه : ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ٢٢٠° فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ١١٠° (ب) ٧٠° (جـ) ١٤٠° (د) ٨٠°

٦ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ، $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ، أ ب = ٣ سم ، جـ هـ = ٢ سم

فإن : جـ ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ (أ) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) يوازي المستقيم : ٣ ص − س − ١ = ٠ .

(ب) أ ب ج د شبه منحرف فيه : $\overline{أد}$ // $\overline{ب ج}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، أب = ٣ سم
، ب ج = ٦ سم ، أد = ٢ سم أوجد : طول $\overline{د ج}$ ثم أوجد قيمة : جتا (∠ب ج د)

٣ (أ) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٣ ويمر بالنقطة (١ ، ٢)

(ب) **بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س التى تحقق :**

٢ جا س = ظا² ٦٠° − ٢ ظا ٤٥° (حيث س قياس زاوية حادة).

٤ (أ) إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك)

والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

أوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ متعامدين.

(ب) أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان : √٢ أب = أج

فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية ج

٥ (أ) إذا كانت أ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، ج (٥ ، ١)

وكانت : أب = ب ج ، ب ∉ $\overleftrightarrow{أج}$ فأوجد : قيمة س

(ب) أثبت أن النقط أ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، −٤) ، ج (−٤ ، ٢)

هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب ،

ثم أوجد إحداثيي نقطة د التى تجعل الشكل أ ب ج د مستطيلاً.

١٥ محافظة الفيوم

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

[١] البعد العمودى بين المستقيمين : س − ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٢ (د) ٣

[٢] مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (ج) ٣٦٠° (د) ٢٧٠°

[٣] إذا كانت : ظا (س + ١٠°) = √٣ حيث س قياس زاوية حادة

فإن : س = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (ج) ٥٠° (د) ٧٠°

[٤] الشكل الذى عدد أضلاعه يساوى عدد أقطاره هو ....

(أ) الشكل الرباعى. (ب) المثلث.

(ج) الشكل الخماسى. (د) الشكل السداسى.

[٥] دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول

فإن النقطة .... تنتمى إليها.

(أ) (١ ، −٢) (ب) (−٢ ، √٥)

(ج) (√٣ ، ١) (د) (٠ ، ١)

[٦] المربع الذى طول قطره ٨ √٢ سم فإن مساحته تساوى .... سم².

(أ) ٤ (ب) ٣٢ (ج) ٦٤ (د) ١٦

٢ (أ) أثبت أن النقط أ (٣ ، −١) ، ب (−٤ ، ٦) ، ج (٢ ، −٢) تقع على دائرة واحدة مركزها النقطة م (−١ ، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة حيث π = ٣,١٤

(ب) **بدون استخدام حاسبة الجيب أثبت أن :**

ظا² ٦٠° − ظا² ٤٥° = جا² ٦٠° + جتا² ٦٠° + ٢ جا ٣٠°

٣ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{أب}$ من نقطة منتصفها

حيث أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥)

(ب) أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أج = ٥ سم ، ب ج = ٤ سم

أوجد قيمة : ٢ جتا² ج + جا² أ

٤ (أ) أثبت أن النقط أ (٣ ، −٣) ، ب (−٥ ، ٠) ، ج (٠ ، −٧) ، د (٨ ، −٩)

هى رؤوس متوازى أضلاع.

(ب) أوجد قيمة س إذا كان : ٤ س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°



٥ (أ) إذا كان المستقيمان : ٣س - ٤ص - ٣ = ٠ ، ك ص + ٤ س - ٨ = ٠ متعامدين

فأوجد : قيمة ك

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزأين موجبين طولاهما ١ ، ٤ وحدات طول على الترتيب.



١٦ محافظة بنى سويف

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ٤ جا ٦٠° ظا ٦٠° = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢ $\sqrt{٣}$

٢ صورة النقطة (٤ ، ٥) بالانتقال (٢ ، ٣) هى ....

(أ) (٦ ، -٨) (ب) (-٨ ، ٦) (جـ) (٦ ، ٨) (د) (-٦ ، -٨)

٣ البعد العمودى بين المستقيمين : س - ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠

يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

٤ معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٥ ، ٣) ويوازى محور الصادات هى ....

(أ) س = -٥ (ب) ص = -٥ (جـ) ص = ٣ (د) س = ٣

٥ عدد محاور التماثل للدائرة ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٦ النقط (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٦) ، (٨ ، ٠) ....

(أ) تكون مثلثًا حاد الزوايا. (ب) تكون مثلثًا قائم الزاوية.

(جـ) تكون مثلثًا منفرج الزاوية. (د) تقع على استقامة واحدة.

٢ (أ) إذا كانت : النقطة حـ (٦ ، -٤) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ (٥ ، -٣)

أوجد : إحداثيى النقطة ب

(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف فيه :

$\overline{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق(∠ب) = ٩٠°

، أء = ٢٠ سم ، أب = ١٢ سم

، ب حـ = ٢٥ سم

أوجد : طول $\overline{ء حـ}$ ، ق(∠حـ)

٣ (أ) أثبت أن : $\frac{١}{٢}$ جا ٦٠° = جا ٣٠° جتا ٣٠°

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) وميله يساوى ٢

٤ (أ) إذا كانت : جتا هـ ظا ٣٠° = جا² ٤٥°

أوجد : ق(∠هـ) حيث هـ زاوية حادة.

(ب) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١) ، (٦ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٥ (أ) أثبت أن النقط أ (٣ ، -١) ، ب (-٤ ، ٦) ، حـ (٢ ، -٢) تقع على الدائرة التى مركزها م (-١ ، ٢)

(ب) أوجد ميل الخط المستقيم : ٣ ص - ٢ س + ٥ = ٠ .
، ثم أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

١٧ محافظة المنيا

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية التى قياسها ٦٥° تتمم زاوية قياسها ....°

(أ) ٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ١١٥ (د) ٤٥

٢ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق(∠أ) + ق(∠حـ) = ٢٠٠°

فإن : ق(∠ب) = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٦٠



[٣] مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أصغر من (ب) يساوى (جـ) أكبر من (د) ضعف

[٤] إذا كانت : جا س = $\frac{١}{٢}$ فإن : ق(∠س) = ...° حيث س زاوية حادة.

(أ) ٤٥ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ٣٠

[٥] البُعد بين النقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٤) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

[٦] إذا كان : س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ مستقيمين متوازيين

فإن : ك = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

٢ (أ) أوجد قيمة المقدار الآتى بدون استخدام الآلة :

جتا ٦٠° جا ٣٠° − جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا² ٣٠°

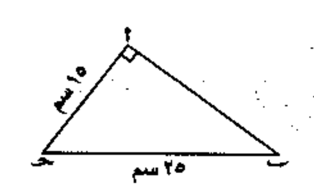
(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين :

أ(٢ ، −٣) ، ب(٥ ، −٤)

٣ (أ) بدون استخدام الآلة أوجد قيمة س التى تحقق : ٢ جا س = ظا² ٦٠° − ٢ ظا ٤٥°

حيث س قياس زاوية حادة.

(ب) فى الشكل المقابل :



△ أ ب حـ فيه : ق(∠أ) = ٩٠°

، أ حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ٢٥ سم

أثبت أن : جتا حـ جتا ب − جا حـ جا ب = ٠

٤ (أ) أثبت أن النقط : أ(−١ ، −٤) ، ب(١ ، ٠) ، حـ(٢ ، ٢)

تقع على استقامة واحدة.

(ب) إذا كانت : حـ(٦ ، −٤) هى منتصف أب حيث أ(٥ ، −٣) فأوجد إحداثيى نقطة ب

٥ (أ) أثبت أن المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يوازى المستقيم الذى معادلته : س − ص − ١ = ٠

(ب) أوجد قيمة أ إذا كان البُعد بين النقطتين : (أ ، ٧) ، (−٢ ، ٣) يساوى ٥ وحدات طول.

١٨ محافظة أسيوط

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] قياس الزاوية المستقيمة يساوى ....°

(أ) ٩٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٢٤٠

[٢] إذا كانت : ظا (س + ٢٠)° = √٣ حيث (س + ٢٠)° قياس زاوية حادة

فإن : س = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ٤٠

[٣] طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) ضعف (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

[٤] إذا كان المستقيمان : س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٧ متعامدين

فإن : ك = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

[٥] المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ١٢ سم تكون مساحته .... سم²

(أ) ١٦ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٦ (د) ٧٢

[٦] البُعد العمودى بين المستقيمين : س − ٣ = ٠ ، س + ٤ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٦

٢ (أ) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ

، أ ب = ١٣ سم ، ب حـ = ١٢ سم

أثبت أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

(ب) بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط : أ(١ ، ١) ، ب(٥ ، ١) ، حـ(٣ ، ٤) من حيث أطوال أضلاعه.



٣ (أ) إذا كان : ٢ جا س = ظا² ٦٠° − ٤ جا ٣٠° أوجد : ق(∠س) حيث س زاوية حادة.

(ب) أ ب ج د متوازي أضلاع فيه : أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، −٥) ، ج(١ ، ٤)
أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه ، ثم أوجد إحداثيي نقطة د

٤ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة : جتا ٦٠° + جتا² ٣٠° + ظا² ٤٥°

(ب) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ √٣ ، ٣) ، (√٣ ، ٤) عمودى على الخط المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٦٠°

٥ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازى المستقيم :
س + ٣ ص = ٧

(ب) أوجد ميل الخط المستقيم وطول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم : $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٢}$



١٩ محافظة سوهاج

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة القاعدة.

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٢ : ١ (ج) ١ : ٢ (د) ٣ : ٢

٢ إذا كانت : جا هـ = جتا هـ فإن : ق(∠هـ) = ...° (حيث هـ زاوية حادة)

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠

٣ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ....°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (ج) ١٨٠ (د) ٣٦٠

٤ البعد بين النقطتين (٣ ، ٠) ، (−١ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٧

٥ المربع الذى طول ضلعه √٣ سم تكون مساحته .... سم².

(أ) ٤ √٣ (ب) ٩ (ج) ٣ (د) ٦

٦ إذا كانت : أ(٥ ، −٣) ، ب(٧ ، −٥) فإن نقطة منتصف : أب هى ....

(أ) (٣ ، ٥) (ب) (٢ ، ٠) (ج) (٥ ، −٥) (د) (٦ ، −٤)

٢ (أ) إذا كانت : جتا هـ = ٣ جتا² ٣٠° − ١ (حيث هـ زاوية حادة) فأوجد : ق(∠هـ)

(ب) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط أ(١ ، ٤) ، ب(−١ ، −٢) ، ج(٢ ، −٣) قائم الزاوية فى ب

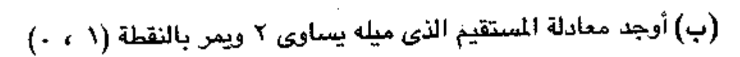
٣ (أ) فى الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث قائم الزاوية فى ج فيه :

أب = ١٣ سم ، ب ج = ١٢ سم

أوجد : ١ طول أج

٢ جا أ جتا ب + جتا أ جا ب



(ب) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٠)

٤ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : ٢ جا ٣٠° = ظا² ٦٠° − ٢ ظا ٤٥°

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (−١ ، −٣)
ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل.

٥ (أ) أثبت أن النقط أ(−٣ ، −١) ، ب(٦ ، ٥) ، ج(٣ ، ٣) تقع على استقامة واحدة.

(ب) أثبت أن المستقيم الذى يمر بالنقطتين (−٣ ، −٢) ، (٤ ، ٥) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°



٢٠ محافظة قنا

أجب عن الأسئلة الآتية :

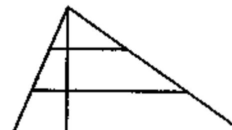
١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن : جا ٢ س = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ج) ٦٠ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



[٢] عدد الأشكال الرباعية فى الشكل المقابل هو ....



(أ) ٣ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

[٣] إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س + ص = ٤ ، أ س + ٣ ص = ٠ متعامدين

فإن : أ = ...

(أ) −٣ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٣

[٤] عدد محاور تماثل المعين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

[٥] المستقيم الذى معادلته : ٢ ص = ٣ س − ٦ يقطع من محور الصادات

جزءًا طوله .... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) $\frac{٣}{٢}$

[٦] صورة النقطة (−٣ ، ٢) بالانعكاس فى نقطة الأصل هى ....

(أ) (٣ ، ٢) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (−٣ ، −٢) (د) (−٣ ، ٢)

٢ (أ) Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم

أثبت أن : جا² أ + ١ = ٢ جتا² جـ + جتا² أ

(ب) أثبت أن النقط أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، −١) ، جـ (٢ ، ٣)

تقع على استقامة واحدة.

٣ (أ) إذا كانت : جا س طا ٣٠° = جا² ٤٥°

فأوجد : قيمة س بالدرجات حيث س قياس زاوية حادة.

(ب) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)

يوازى المستقيم الذى معادلته : ٣ ص − س − ١ = ٠

٤ (أ) بدون استخدام الحاسبة أثبت أن : جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

(ب) أ ب جـ ء شكل رباعى حيث أ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، −٢) ، جـ (١ ، −١) ، ء (٠ ، ٤)

أثبت أن الشكل أ ب جـ ء معين ، وأوجد مساحة سطحه.

٥ (أ) أثبت أن النقط أ (−٣ ، ٠) ، ب (٣ ، ٤) ، جـ (١ ، −٦)

هى رؤوس لمثلث متساوى الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ عمودية على ب جـ

(ب) أ ب جـ ء متوازى أضلاع حيث أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٥) ، جـ (٠ ، −٣)

أوجد إحداثيى النقطة ء

٢١ محافظة الأقصر

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] عدد المثلثات القائمة الزاوية المظللة التى تلزم لتغطية سطح المستطيل تمامًا يساوى ....

(أ) عشرة (ب) ثمانية

(جـ) ستة (د) أربعة

[٢] إذا كان : ق(∠أ) = ٨٥° وكانت : جا ب = جتا ب فى Δ أ ب جـ

فإن : ق(∠جـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٥٠° (د) ٦٠°

[٣] صورة النقطة (−٥ ، ٦) بالانتقال (٣ ، −٢) هى ....

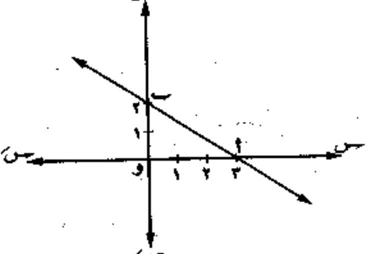
(أ) (−٤ ، −٢) (ب) (٤ ، ٢) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٢ ، −٤)

[٤] فى الشكل المقابل :

ميل أب = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{-٣}{٢}$



[٥] قياس الزاوية الخارجة عند رأس من رؤوس مثلث متساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°



[٦] إذا كانت : جـ (−٣ ، ص) منتصف أب حيث أ (س ، −٦) ، ب (٩ ، −١٢)

فإن ص − س = ...

(أ) ٧   (ب) ٩   (جـ) ٦   (د) −١٨

٢ (أ) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٥) ، (٣أ − ١ ، ١) يساوى ٥ وحدات طول

فأوجد : قيمة أ

(ب) إذا كان : ٣ ظا س − ٤ جا² ٣٠° = ٨ جتا² ٦٠°

فأوجد : قيمة س حيث س قياس زاوية حادة.

٣ (أ) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) موازيًا المستقيم : ٢ س + ٣ ص − ٦ = ٠

(ب) أوجد قياس الزاوية الموجبة هـ التى يصنعها المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، √٣) ، (١ ، ٤√٣) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٤ (أ) أب قطر فى الدائرة م حيث : أ (٤ ، −١) ، ب (−٢ ، ٧)

أوجد طول نصف قطر الدائرة ومساحتها.

(ب) أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم

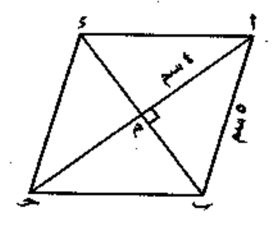
، رسم أء ⊥ ب جـ يقطعها فى ء

أثبت أن : [١] جا² جـ + جتا² جـ = ١   [٢] جا ب + جتا جـ > ١

٥ (أ) إذا كان المستقيم أب // محور الصادات حيث : أ (س ، ٧) ، ب (٣ ، ٥)

فأوجد : قيمة س

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء معين تقاطع قطراه فى م

فإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ م = ٤ سم

أوجد : [١] ق (∠ ب أ ء)

[٢] مساحة المعين أ ب جـ ء

٢٢ محافظة أسوان

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الزاوية التى قياسها ٦٥° تتمم زاوية قياسها ....

(أ) ١٣٥°   (ب) ١١٥°   (جـ) ٢٥°   (د) ١٥°

[٢] إذا كان : أب ⊥ جـء وكان : ميل أب = $\frac{1}{2}$ فإن : ميل جـء = ...

(أ) ٢   (ب) −٢   (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) −$\frac{1}{2}$

[٣] إذا كانت : جـ ∈ محور تماثل أب فإن : جـ أ .... جـ ب

(أ) ⊥   (ب) >   (جـ) <   (د) =

[٤] إذا كانت الأطوال ٣ سم ، ٧ سم ، ص سم هى أطوال أضلاع مثلث

فإن : ص يمكن أن تساوى .... سم.

(أ) ٣   (ب) ٤   (جـ) ٧   (د) ١٠

[٥] البعد بين النقطتين : (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٨) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٦   (ب) ٨   (جـ) ١٠   (د) ١٤

[٦] إذا كانت : ظا (س + ١٠°) = √٣ حيث س زاوية حادة

فإن : ق (∠ س) = ...

(أ) ٨٠°   (ب) ٥٠°   (جـ) ٣٥°   (د) ٢٠°

٢ (أ) إذا كانت : ٢ جا س = ظا² ٦٠° − ٢ ظا² ٤٥°

أوجد : قيمة س (حيث س قياس زاوية حادة)

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على أب من نقطة منتصفها حيث :

أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥)

٣ (أ) إذا كانت النقطة جـ (٤ ، ٢) حيث جـ منتصف أب ، أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ص)

أوجد : قيمة ص



(ب) إذا كانت : أ(−١ ، −١) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٦ ، ٠) رؤوس مثلث
أثبت أن : المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في ب

٤ (أ) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه : س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم
أوجد : [١] ظا س × ظا ع   [٢] جتا س جتا ع − جا س جا ع

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين طولاهما ١ ، ٤ وحدات طول على الترتيب.

٥ (أ) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٣) ، (٢ ، ٤)
يوازي المستقيم : ٣ ص − س − ١ = ٠

(ب) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان : ٢ أ ب = √٣ أ حـ
أوجد النسبة المثلثية الأساسية للزاوية حـ





أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الشكل الرباعي أ ب حـ ء الذي فيه : أ ب > حـ ء ، أ ب // حـ ء يكون ....

(أ) مربعًا.   (ب) مستطيلاً.   (جـ) معينًا.   (د) شبه منحرف.

[٢] في الشكل المقابل :
أ ب حـ ء مستطيل فيه :
أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، هـ ∈ أ ء
فإن : مساحة سطح المثلث هـ ب حـ = ... سم^{٢}

(أ) ١٤   (ب) ٢٤
(جـ) ٢٨   (د) ٤٨

[٣] لأي زاوية قياسها أ يكون $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ = ...

(أ) جا أ   (ب) جتا أ   (جـ) ظا أ   (د) ١

[٤] إذا كان : أ ب حـ ء مستطيلاً ، أ(١ ، ٠) ، حـ(٤ ، ٤)
فإن : ب ء = ... وحدة طول.

(أ) ٥   (ب) ٨   (جـ) ٩   (د) ١٠

[٥] إذا كان المستقيمان : س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ١ متعامدين
فإن : ك = ...

(أ) ٢   (ب) ١   (جـ) −١   (د) −٢

[٦] في الشكل المقابل :
أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق(∠أ) = ٣٠°
فإن ب حـ : أ حـ : أ ب = ...

(أ) ١ : √٣ : ٢   (ب) ٢ : √٣ : ١
(جـ) ١ : ٢ : √٣   (د) √٣ : ١ : ٢

٢ (أ) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم
أوجد قيمة كل من : [١] ظا س × ظا ص   [٢] جا^{٢} س + جتا^{٢} س

(ب) بين نوع المثلث الذي رؤوسه النقط : أ(٣ ، ٣) ، ب(١ ، ٥) ، حـ(١ ، ٣) بالنسبة لأطوال أضلاعه وبالنسبة لقياسات زواياه.

٣ (أ) إذا كانت : ظا س = ٤ جا ٣٠° جتا ٦٠° ، س قياس زاوية حادة
فأوجد قيمة كل من : [١] س   [٢] جا س

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٠)

٤ (أ) في الشكل المقابل :
أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم
، ب حـ = ١٢ سم ، أ ء ⊥ ب حـ
أوجد قيمة كل من :

[١] جتا ب   [٢] ق(∠ب)   [٣] جا (٩٠° − ب)



(ب) أ ب حـ ء معين فيه: أ $(-2 ، 3)$ ، ب $(-1 ، -2)$ ، حـ $(4 ، -3)$

أوجد: [١] إحداثيي نقطة تقاطع قطريه. [٢] إحداثيي النقطة ء

[٥] (أ) إذا كان المستقيم $ل_1$ يمر بالنقطتين $(2 ، 1)$ ، $(3 ، ك)$ والمستقيم $ل_2$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $45°$

فأوجد: قيمة ك إذا كان $ل_1 // ل_2$

(ب) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزءين موجبين طولاهما ٢ ، ٤ على الترتيب.



٢٤ محافظة جنوب سيناء

أجب عن الأسئلة الآتية:

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

[١] إذا كانت: جا $(س + 15°) = \frac{1}{2}$ فإن: ظا س = ... حيث س زاوية حادة.

(أ) ١ (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (د) $\frac{1}{2}$

[٢] المسافة بين النقطتين $(-3 ، 0)$ ، $(0 ، -4)$ تساوي .... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

[٣] إذا كانت: أ = $(-4 ، 5)$ ، ب = $(-2 ، -1)$ فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي ....

(أ) $(0 ، 1)$ (ب) $(-3 ، 3)$ (جـ) $(-3 ، 2)$ (د) $(1 ، 0)$

[٤] أ ب حـ مثلث ، ق(∠أ) = $120°$ ، أ ب = أ حـ فإن: ق(∠حـ) = ...

(أ) $60°$ (ب) $45°$ (جـ) $50°$ (د) $30°$

[٥] إذا كان: س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ خطين مستقيمين متعامدين

فإن: ك = ...

(أ) -2 (ب) ٢ (جـ) -1 (د) ١

[٦] أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ حيث ء $\in \overline{ب حـ}$

فإن: $(أء)^2$ = ...

(أ) ب ء × ب حـ (ب) حـ ء × حـ ب (جـ) ء ب × ء حـ (د) $(ء ب)^2 \times (ء حـ)^2$

[٢] (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن: جتا $60°$ = جتا² $30°$ − جا² $30°$

(ب) إذا كانت: ء = $(1 ، -3)$ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ = $(4 ، -3)$

أوجد إحداثيي النقطة ب

[٣] (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: $(1 ، 3)$ ، $(-1 ، -3)$

(ب) بين نوع المثلث أ ب حـ حيث: أ = $(3 ، 3)$ ، ب = $(1 ، 5)$ ، حـ = $(1 ، 3)$ بالنسبة لأطوال أضلاعه.

[٤] (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2 ، 3)$ ويصنع زاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها $45°$

(ب) أوجد قيمة: $\frac{2 \text{ ظا } 45°}{1 + \text{ظا}^2 45°}$

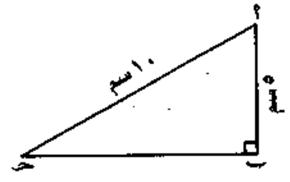
[٥] (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله يساوي ٢ ، وطول الجزء المقطوع من محور الصادات الموجب يساوي ٥ وحدات.

(ب) في الشكل المقابل:

Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب فيه:

أ حـ = ١٠ سم ، أ ب = ٥ سم

أوجد: [١] ق(∠حـ) [٢] جا² حـ + جتا² حـ



٢٥ محافظة شمال سيناء

أجب عن الأسئلة الآتية:

[١] اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

[١] إذا كانت: جا س = $\frac{1}{2}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن: س = ...

(أ) $90°$ (ب) $60°$ (جـ) $45°$ (د) $30°$





٢ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٣ ميل الخط المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ٤٥° يساوى ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ١,٤

٤ الزاوية التى قياسها ٤٠° تتمم زاوية قياسها ....

(أ) ٣٠° (ب) ١٤٠° (جـ) ٥٠° (د) ٤٠°

٥ إذا كانت : أ(٢ ، −٢) ، ب(−٢ ، ٢) فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هى ....

(أ) (−١ ، ١) (ب) (١ ، −١) (جـ) (٤ ، −٤) (د) (٠ ، ٠)

٦ إذا كانت : ٣ ، ٧ ، ل أطوال أضلاع مثلث فإن ل يمكن أن تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٠

٢ (أ) أثبت أن : جتا ٦٠° = ٢ جتا² ٣٠° − ١ (بدون استخدام الحاسبة)

(ب) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط : أ(١ ، −٢) ، ب(−٤ ، ٢) ، جـ(١ ، ٦) متساوى الساقين.

٣ (أ) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ٢ ويقطع ٧ وحدات موجبة من محور الصادات.

(ب) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه :

أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم

١ أوجد : طول $\overline{أب}$

٢ أثبت أن : جا² أ + جتا² أ = ١

٤ (أ) إذا كانت : جتا س = $\frac{\text{جا } ٦٠° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا}^٢ \ ٤٥°}$

أوجد : قيمة س حيث س قياس زاوية حادة. (بدون استخدام الحاسبة)

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين أ(٢ ، −٣) ، ب(٥ ، −٤)



٥ إذا كانت : أ(٣ ، −١) ، ب(−٤ ، ٦) ، جـ(٢ ، −٢) ، م(−١ ، ٢)

١ أثبت أن : النقط أ ، ب ، جـ تقع على دائرة مركزها م

٢ أوجد : محيط الدائرة م حيث (π = ٣,١٤)

٢٦ محافظة البحر الأحمر

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : أ(٥ ، ٧) ، ب(١ ، −١) فإن منتصف $\overline{أب}$ هى النقطة ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٢) (د) (٣ ، ٤)

٢ معين طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم فإن مساحة سطحه .... سم².

(أ) ٤٨ (ب) ٢٨ (جـ) ٢٤ (د) ١٤

٣ إذا كانت : جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن : جا ٢ س = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٤ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٥ سم ، ١٣ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم.

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١٣ (د) ١٦

٥ إذا كان المستقيمان : ٣س − ٤ص = ٣ ، ٤س + ك ص = ٨ متعامدين فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٤ (د) −٣

٦ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° ظا ٤٥°

(ب) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، ٢) ، (−٢ ، −١)

٣ (أ) إذا كانت : طا س = ٤ حتا ٦٠° حا ٣٠° حيث : س زاوية حادة أوجد : قيمة س

(ب) أ ب ح مثلث فيه : أ (٢ ، ٤) ، ب (−٣ ، ٠) ، ح (−٧ ، ٥)

أثبت أن المثلث أ ب ح قائم الزاوية ثم أوجد مساحة سطحه.

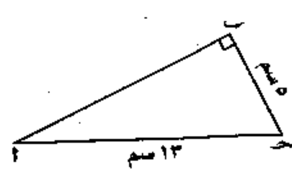
٤ (أ) أوجد معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات طوله ٧ وحدات طول.

(ب) فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب ح مثلثًا قائم الزاوية فى ب

، أ ح = ١٣ سم ، ب ح = ٥ سم

أوجد : قيمة حا أ حتا ح + حتا أ حا ح



٥ (أ) إذا كان البعد بين النقطتين (س ، ٧) ، (−٢ ، ٣) هو ٥ وحدة طول أوجد : قيم س

(ب) إذا كان المستقيم : ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك)

، المستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥°

أوجد : قيمة ك إذا كان : ل١ // ل٢

٢٧ محافظة مطروح

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : حتا ٢ س = $\frac{١}{٢}$ فإن : ق (∠س) = ...

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

[٢] الزاوية التى قياسها ٣٧° تتممها زاوية قياسها ....

(أ) ٥٣° (ب) ١٤٣° (ج) ٣٧° (د) ٩٠°

[٣] إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متوازيين فإن : ك = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (ج) ٢ (د) $\frac{١}{٣}$

[٤] مساحة سطح الدائرة تساوى ....

(أ) π نق (ب) ٢ π نق (ج) π نق² (د) ٢ π نق²

[٥] فى المثلث : أ ب ح يكون : أ ب + ب ح .... أ ح

(أ) < (ب) ≤ (ج) > (د) ≥

[٦] إذا كان : أ ب قطرًا فى الدائرة حيث : أ (٣ ، −٥) ، ب (٥ ، ١)

فإن مركز الدائرة هو ....

(أ) (٨ ، −٢) (ب) (٤ ، ٢) (ج) (٢ ، ٢) (د) (٤ ، −٢)

٢ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : طا ٦٠° = $\frac{٢ \text{ طا } ٣٠°}{١ - \text{طا}^{٢} ٣٠°}$

(ب) أثبت أن : النقط أ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، −٤) ، ح (−٤ ، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية فى ب

٣ (أ) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (−٢ ، ٣) يساوى ٥ وحدة طول فأوجد : قيمة أ

(ب) أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم

أوجد : قيمة حا أ حتا ح + حتا أ حا ح

٤ (أ) إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين متتامتين بحيث كان أ : ب = ١ : ٢

أوجد : حا أ + حتا ب

(ب) أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم

الذى معادلته : $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

٥ (أ) إذا كانت ح منتصف أ ب حيث : أ = (س ، −٦) ، ب = (٩ ، −١٢)

، ح = (−٣ ، ص) أوجد : قيمتى س ، ص

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازى المستقيم س + ٢ ص = ٧